

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Z A M P

Journal of Applied Mathematics and Physics
Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

Éditeurs: J. Ackeret E. Baldinger E. Baumann R. Mercier P. Scherrer E. Stiefel
F. Stüssi W. Traupel H. Ziegler
Redactor: R. Sängler

INHALT - CONTENTS - SOMMAIRE

Paul Scherrer 70jährig	1
COLLINS, D.: On the Stress Distributions Due to Force Nuclei in an Elastic Solid Bounded Internally by a Spherical Hollow and in an Elastic Sphere	3
COTTI, P.: Über die Erzeugung von hohen, kurzzeitigen Magnetfeldern	17
EASON, G., and SHIELD R. T.: The Plastic Indentation of a Semi-Infinite Solid by a Perfectly Rough Circular Punch	33
GUPTA, A. S.: Flow of an Electrically Conducting Fluid Past a Porous Flat Plate in the Presence of a Transverse Magnetic Field	43

Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves

GADD, G. E.: The Possibility of Normal Shock Waves on a Body with Convex Surfaces in Inviscid Transonic Flow	51
KROGDAHL, W. S.: Numerical Solutions of the Van der Pol Equation	59
MEKSYN, D.: Plate Thermometer	63

Varia - Miscellaneous - Divers

Réunion d'automne de la Société Suisse de Physique dans le cadre de la 139 ^e assemblée annuelle de la Société Helvétique des Sciences naturelles, à Lausanne le 12 septembre 1959	68
International Symposium on Active Networks and Feedback Systems	80
Buchbesprechungen - Book Reviews - Notices bibliographiques	81

ZAMP	Vol. XI	Fasc. 1	Pag. 1-88	25. 1. 60
------	---------	---------	-----------	-----------

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

ZAMP

Redaktor/Editor/rédacteur: Prof. Dr. R. Sängner, Postfach Zürich 23 (Schweiz)

ZAMP erscheint regelmässig alle zwei Monate. *Redaktionsschluss*: spätestens 12 Wochen vor Erscheinungstermin. Manuskripte und alle die Redaktion betreffenden Zuschriften sind an den Redaktor zu richten. Manuskripte für *Kurze Mitteilungen* können, falls die Autoren auf Zustellung eines Korrekturabzuges verzichten, 8 Wochen vor Erscheinungstermin eingereicht werden. Die Beiträge werden in deutscher, englischer, französischer oder italienischer Sprache publiziert, doch soll jeder *Originalarbeit* und *Kurzen Mitteilung* eine kurze Zusammenfassung in einer andern als der Originalsprache beigegeben werden. *Abbildungsvorlagen* sollen reproduktionsfertig mit Reduktionsmaßstab versehen eingeliefert werden, hingegen soll die Beschriftung nur mit Bleistift, am besten auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier, ausgeführt werden. Autoren von Originalarbeiten, welche einen Umfang von mehr als 16 Druckseiten aufweisen, haben einen *Satzbeitrag* zu entrichten. Dieser beträgt sFr. 25.- pro Seite von der 17. bis 24. Seite, sFr. 40.- pro Seite von der 25. bis 32. Seite und sFr. 50.- pro Seite von der 33. Seite an. Die Verfasser von *Zusammenfassenden Berichten*, *Originalarbeiten* und *Kurzen Mitteilungen* erhalten 50 Gratisseparata ohne Umschlag.

ZAMP is published regularly every two months. All papers must be in the hand of the editor at least 12 weeks before publication of the issue. Manuscripts and all other correspondence concerning contributions to the periodical should be addressed to the Editor. Manuscripts of *Brief Reports* can be submitted 8 weeks before publication of the issue, if the authors dispense with proof-reading. The contributions will be published in English, German, French, or Italian; to each *Original Paper* and *Brief Report* should be added a brief summary in a language other than the original one. Drawings and photographs for *illustrations* should be sent ready for reproduction with indication of the proposed reduction; lettering on the illustrations should be entered in pencil, preferably on a loosely attached transparent sheet. Authors of *Original Papers* exceeding 16 printed pages are requested to pay a *contribution* of Sw.Frs. 25.- per page for pages 17-24, Sw.Frs. 40.- per page for pages 25-32, and Sw.Frs. 50.- per page for pages 33 and over. The authors of *Survey Articles*, *Original Papers*, and *Brief Reports* receive 50 free separata prints without cover.

ZAMP paraît régulièrement tous les deux mois. Derniers délais pour présenter les manuscrits: trois mois avant la parution de chaque numéro. Tous les manuscrits et toute correspondance relatifs à la rédaction sont à adresser au rédacteur. Les manuscrits pour des *communications brèves* peuvent être présentés huit semaines avant la parution, si les auteurs renoncent à contrôler les épreuves. Les articles seront publiés en langues française, anglaise, allemande ou italienne; cependant, chaque *article original* et toute *communication brève* devront être accompagnés d'un résumé en une autre langue. Les *illustrations* doivent être prêtes à la reproduction et il faudra y indiquer l'échelle de réduction. Le légende devra être inscrite au crayon, de préférence sur papier transparent, légèrement collé à l'illustration. Pour articles originaux qui dépassent 16 pages imprimées, une *contribution* de frs. s. 25.- par page doit être payée pour les pages 17-24 et de frs.s. 40.- par page pour les pages 25-32; à partir de page 33 la contribution est de frs. s. 50.- par page. Les auteurs de *comptes rendus*, ainsi que ceux d'*articles originaux* et de *communications brèves* recevront 50 tirés à part sans couverture de leur article.

Jahresabonnement (6 Nummern): Schweizer Fr. 68.- (DM 68.-), Einzelnummer sFr. 14.-

Annual subscription (6 issues): Swiss francs 68.- (DM 68.-), single copy Sw. Frs. 14.-

Abonnement annuel (6 numéros): Francs suisses 68.- (DM 68.-), le numéro frs.s. 14.-

Insertate - Advertisements - Annonces: $\frac{1}{4}$ Seite/page: Fr./DM 165.-, $\frac{1}{2}$ Seite/page: Fr./DM 88.-, $\frac{1}{4}$ Seite/page: Fr./DM 50.-

Alle Rechte, einschliesslich der Übersetzung und Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten. - All rights, incl. translations and photostatic and microfilm reproduction, reserved. - Tous droits, y compris traductions et reproductions photostatiques et par microfilm, réservés.

1960, Birkhäuser Verlag, Basel, Switzerland © Printed in Switzerland

Paul Scherrer 70jährig

Am 3. Februar 1960 begeht Prof. Dr. PAUL SCHERRER, Direktor des Physikalischen Institutes der ETH, seinen 70. Geburtstag. Dieses Ereignis bedeutet gemäss den üblichen Vorschriften einer Hochschule mehr als nur einen Markstein im physischen Leben eines Menschen, sondern bedingt meistens den Rücktritt von Amt und Würden und im Falle SCHERRER das Ende einer mehr als 30jährigen Epoche der physikalischen Lehr- und Forschungstätigkeit, welcher der Jubilar sein ureigenstes Gepräge aufdrückte.

1920 kam SCHERRER zusammen mit dem grossen Gelehrten DEBYE von Göttingen nach Zürich, um hier die zweite Lehrstelle für Experimentalphysik an der ETH zu bekleiden. Es folgte eine selten glückliche Zeit am Physikalischen Institut der ETH, die getragen war von den beiden Persönlichkeiten DEBYE und SCHERRER. Das lebendige Zusammenspiel der beiden, in ihren Grundzügen so verschiedenen, Gelehrten liess seine befruchtende Wirkung weit in die Welt ausstrahlen und Zürich in kürzester Zeit zu einem Physikzentrum internationalen Formats heranwachsen.

Leider fand diese herrliche Episode schon 1927 ein Ende, indem DEBYE sich entschloss, dem an ihn ergangenen Ruf an die Universität Leipzig Folge zu leisten. An der ETH wurden daraufhin die beiden Hauptprofessuren für Experimentalphysik in eine zusammengelegt und diese SCHERRER übertragen, dessen Lehrerfolg sich bereits damals eines grossen Rufes erfreute. Damit war der Start für die weitere Entwicklung von Forschung und Unterricht auf dem Gebiete der Physik vorgezeichnet, und zwar in einer Eigenart, wie sie nur einmalig anzutreffen ist. Wenn der Schreibende mit besonderer Betonung auf die Jahre hinwies, wo das Doppelgestirn DEBYE-SCHERRER das physikalische Geschehen in Zürich beherrschte, so auch deshalb, weil es ihm persönlich vergönnt war, diese Zeitspanne als Assistent von DEBYE mitzuerleben und sie ihm wie ein leuchtendes Kleinod unauslöschlich in Erinnerung blieb.

Die nun folgenden drei Dezennien zeugen von einer unerwarteten, mächtigen Entwicklung der physikalischen Disziplinen an der ETH. Sicherlich hat auch WOLFGANG PAULI, der sich dem Jubilar kurze Zeit nach seiner Ernennung zum Leiter des Physikalischen Institutes der ETH, als Ordinarius für theoretische Physik, beigesellte, entscheidenden Einfluss auf das physikalische Leben in Zürich; im engeren Sektor der Experimentalphysik war es aber SCHERRER allein, der dem Geschehen seine ihm charakteristischen Züge aufprägte, alles überstrahlt und beschattet von einer beispiellosen Meisterschaft in der

Darstellungskunst, wie sie sich vor allem in den Vorlesungen SCHERRERS in seltener Blüte offenbaren konnte. Jede neue Erkenntnis auf dem Gebiete der Physik wurde unmittelbar nach ihrem Bekanntwerden in das Pensum der Vorlesungen über Experimentalphysik eingebaut und in einer beglückenden, lebendigen und einfachen Weise vorgetragen, die die Zuhörerschaft stets in helle Begeisterung versetzte. Eine Begeisterung, die mitgeholfen hat, die Kunde von der Meisterschaft des Jubilars weit über die ganze Welt zu verbreiten.

Die Würdigung SCHERRERS als Forscher und Gelehrter findet ihren schönsten Ausdruck in einer im Birkhäuser Verlag, Basel, erschienenen Festschrift zur Feier seines 70. Geburtstages, in welcher sich zahlreiche seiner Schüler und Mitarbeiter zum Worte melden und Zeugnis ablegen von der Vielgestaltigkeit seiner wissenschaftlichen Tätigkeit. Hier sei nur darauf hingewiesen, dass diese Tätigkeit namentlich Fragen des strukturellen Aufbaues der festen Körper und der Deutung ihrer physikalischen Eigenschaften berührte und sich auch auf eine Fülle von Problemen aus dem Gebiete der Kernphysik erstreckte, wobei SCHERRER schon frühzeitig, unmittelbar nach Bekanntwerden der ersten Befunde und Entdeckungen, die fundamentale Bedeutung dieses neuen Forschungszweiges in seiner vollen Tragweite erkannte.

In überzeugende Weise hatte SCHERRER schon kurz nach dem Zweiten Weltkrieg begonnen, in Vorträgen vor Kreisen der schweizerischen Wirtschaft und Industrie wie auch der breiteren Öffentlichkeit auf die überragende Rolle aufmerksam zu machen, welche die Kernenergie als Energielieferant der Zukunft spielt. Es ist weitgehend sein Verdienst, wenn heute in der Schweiz eine Kernreaktoranlage in Betrieb steht, die sowohl in bezug auf die Energiegewinnung und Isotopenverwertung als auch für die Heranbildung eines Stabes qualifizierter Fachleute bereits zukunftsverbundene Arbeit leistet, zu Nutz und Frommen der schweizerischen Wirtschaft.

In seiner Eigenschaft als Redaktor der ZAMP verbleibt dem Schreibenden noch die angenehme Pflicht, dem Jubilar für seine bei der Gründung der Zeitschrift vor 10 Jahren bekundete Bereitwilligkeit zum Beitritt in die Redaktionskommission und für seine in der Folge getätigte Mithilfe während eines ganzen Dezenniums herzlich zu danken.

R. SÄNGER

On the Stress Distributions Due to Force Nuclei in an Elastic Solid Bounded Internally by a Spherical Hollow and in an Elastic Sphere

By DEREK COLLINS, Newcastle upon Tyne, England¹⁾

1. Introduction

Although solutions for the problem of a force nucleus acting at a point in a semi-infinite isotropic elastic solid with stress free surface have been known for some time [1-3]²⁾, the corresponding problem of a force nucleus acting at a point in an infinite elastic solid containing a spherical hollow appears to have received little attention. The simplicity of the solutions of the problem for the semi-infinite solid and of similar problems in the Stokes flow of viscous fluid [4] suggest that the stresses in the problem for the solid containing a spherical hollow ought to be expressible in terms of elementary functions only. In an attempt to find such a solution I obtained general expressions for the stresses due to elastic distributions in an infinite solid containing a spherical hollow in terms of the stresses due to the same distributions in an infinite unbounded solid, these being given in a recent paper [5], henceforth referred to as SH. If the elastic distribution is taken to be a force nucleus, expressions are obtained for the stresses, which, while in closed form, contain elementary functions and integrals which it does not appear possible to evaluate as elementary functions. These integrals could however be evaluated numerically to obtain the stresses on the boundary of the hollow. However, in practice, it proved more convenient to obtain expressions for the stresses as infinite series of spherical harmonics and use these for numerical work.

In section 2 of the present paper I give expressions for the stresses due to a force nucleus acting at a point of an infinite unbounded solid and in section 3 expressions for the additional stresses which must be added to these to give the stress distribution due to the nucleus in a solid containing a spherical hollow, these expressions being infinite series of spherical harmonics. Expressions in closed form are also given for the stresses on the boundary of the hollow, the expressions in this form for the complete stress distribution being omitted because of their length. Numerical examples are given to show the variation of the stresses over the boundary of the hollow. In section 4 I consider the

¹⁾ University of Durham, King's College, Department of Mathematics.

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 16.

problem of an elastic sphere in equilibrium under the action of two equal and opposite force nuclei at internal points of the sphere, expressions for the stresses as series of spherical harmonics and numerical examples being given.

2. Force Nucleus in an Infinite Solid

We first give the stresses due to a force nucleus acting at a point of an infinite unbounded solid. If (x, y, z) are the cartesian and (r, θ, φ) the spherical polar co-ordinates of a general point referred to an origin O , the positive z -axis being the line $\theta = 0$, we suppose the force nucleus of magnitude F acts at the point O_1 , cartesian co-ordinates $(0, 0, f)$, $f > 0$, and is directed along the z -axis in the positive sense. LOVE [6] then gives the cartesian components (u_0, v_0, w_0) of the displacement at the point (x, y, z) as

$$u_0 = \frac{A x (z - f)}{R^3}, \quad v_0 = \frac{A y (z - f)}{R^3}, \quad w_0 = A \left(\frac{(z - f)^2}{R^3} + \frac{3 - 4\eta}{R} \right), \quad (2.1)$$

where $R^2 = x^2 + y^2 + (z - f)^2$, $F = 16 \pi \mu A (1 - \eta)$, η being Poisson's ratio and μ the rigidity.

We can now find the stresses $\widehat{r r}_0$, $\widehat{r \theta}_0$, $\widehat{\theta \theta}_0$ and $\widehat{\varphi \varphi}_0$ in terms of elementary functions from the stress-strain relations. The notation for the stresses is that of SH, the suffix 0 indicating stresses in the unbounded solid. When $r < f$, these stresses can be expanded in series of spherical harmonics as

$$\widehat{r r}_0 = - \frac{2 \mu A}{f^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(n+1)(n^2 - n - 2 - 2\eta)}{(2n+3)} \left(\frac{r}{f} \right)^n - \frac{n(n-1)(n+3-4\eta)}{(2n-1)} \left(\frac{r}{f} \right)^{n-2} \right] P_n(\cos \theta), \quad (2.2)$$

$$\widehat{r \theta}_0 = - \frac{2 \mu A}{f^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(n^2 + 2n - 1 + 2\eta)}{(2n+3)} \left(\frac{r}{f} \right)^n - \frac{(n-1)(n+3-4\eta)}{(2n-1)} \left(\frac{r}{f} \right)^{n-2} \right] T_n^1(\cos \theta), \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\theta \theta}_0 = & \frac{2 \mu A}{f^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(n+1)(n^2 + 4n + 2 + 2\eta)}{(2n+3)} \left(\frac{r}{f} \right)^n - \frac{n^2(n+3-4\eta)}{(2n-1)} \left(\frac{r}{f} \right)^{n-2} \right] P_n(\cos \theta) \\ & + \frac{2 \mu A \cot \theta}{f^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(n+5-4\eta)}{(2n+3)} \left(\frac{r}{f} \right)^n - \frac{(n+3-4\eta)}{(2n-1)} \left(\frac{r}{f} \right)^{n-2} \right] T_n^1(\cos \theta) \end{aligned} \quad (2.4)$$

and

$$\widehat{\varphi\varphi_0} = - \frac{2\mu A}{f^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(n+1)(n-4n\eta-2-2\eta)}{(2n+3)} \left(\frac{r}{f}\right)^n - \frac{n(n+3-4\eta)}{(2n-1)} \left(\frac{r}{f}\right)^{n-2} \right] P_n(\cos\theta) - \frac{2\mu A \cot\theta}{f^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(n+5-4\eta)}{(2n+3)} \left(\frac{r}{f}\right)^n - \frac{(n+3-4\eta)}{(2n-1)} \left(\frac{r}{f}\right)^{n-2} \right] T_n^1(\cos\theta), \quad (2.5)$$

where $P_n(\cos\theta)$ is the Legendre function of the first kind of degree n and $T_n^1(\cos\theta)$ the associated Legendre function of the first kind of degree n and order 1, defined by [7]

$$T_n^1(\sigma) = -(1-\sigma^2)^{1/2} \frac{dP_n(\sigma)}{d\sigma}, \quad \sigma = \cos\theta.$$

When $r > f$, the expressions for the stresses are obtained from equations (2.2) to (2.5) by replacing n by $-(n+1)$ in the n -th term of each series.

3. Force Nucleus Acting at a Point in an Elastic Solid Containing an Unstressed Spherical Hole

We now consider a solid bounded internally by an unstressed spherical hollow $r = a$ ($a < f$), centre O . To obtain expressions in closed form for the stresses $\widehat{r r_1}$, $\widehat{r \theta_1}$, $\widehat{\theta \theta_1}$ and $\widehat{\varphi \varphi_1}$, which must be added to the stresses $\widehat{r r_0}$, $\widehat{r \theta_0}$, $\widehat{\theta \theta_0}$ and $\widehat{\varphi \varphi_0}$ respectively to give the stress distribution due to a force nucleus acting at the point $(0, 0, f)$ of this solid, its axis directed radially outwards from the centre of the hollow, we use equations (3.16), (3.18), (4.5) and (4.7) of SH. In the last two of these equations and in equation (4.6) the expressions $G(a)$ and $H(a)$ should each be multiplied by a factor a^{-2} . The stresses $\widehat{r r_0}$ and $\widehat{r \theta_0}$ and the stress combination $\Theta_0 = \widehat{r r_0} + \widehat{\theta \theta_0} + \widehat{\varphi \varphi_0}$ for the nucleus in the unbounded solid, which are to be substituted in these equations, are taken in the forms containing elementary functions and not as given by equations (2.2) to (2.5). The stresses obtained in this way are in closed form, containing elementary functions together with integrals which it does not appear possible to evaluate as elementary functions. Because of the length of these expressions, only those for the stresses $\widehat{\theta \theta} = \widehat{\theta \theta_0} + \widehat{\theta \theta_1}$ and $\widehat{\varphi \varphi} = \widehat{\varphi \varphi_0} + \widehat{\varphi \varphi_1}$ on the boundary of the hollow are given. These are

$$\widehat{\theta \theta}(a) = \frac{\mu A}{f^2} \left[\frac{2f^2 Q_1(\theta)}{R^5} + Q_2(\theta) - 4 Q_3(\theta) + \frac{2 Q_4(\theta)}{R_1^5} \right] \quad (3.1)$$

and

$$\widehat{\varphi\varphi}(a) = \frac{\mu A}{f^2} \left[\frac{2 f^2 (1 - 2 \eta) (a \cos \theta - f)}{R^3} + Q_5(\theta) + 4 Q_3(\theta) + \frac{2 Q_6(\theta)}{R_1^5} \right], \quad (3.2)$$

where

$$R_1^2 = x^2 + y^2 + (z - f')^2, \quad f f' = a^2.$$

The functions $Q_i(\theta)$; $i = 1, \dots, 6$, are given by

$$\begin{aligned} Q_1(\theta) = & (1 - 2 \eta) a^3 \cos \theta + (1 - 2 \eta) a^2 f (1 - 4 \cos^2 \theta) \\ & + a f^2 \cos \theta (-4 + 2 \eta + (7 - 8 \eta) \cos^2 \theta) + f^3 (4 - 2 \eta - (5 - 4 \eta) \cos^2 \theta), \\ Q_2(\theta) = & (1 - \eta) a \{ 2 (3 - 8 \eta^2) I(c - 2, s, 1) \\ & - (1 + 12 \eta - 16 \eta^3) s^{-1} J(c - 2, s, 1) \} \\ & + (3 - \eta) a \{ 2 (25 - 64 \eta + 40 \eta^2) I(c, s, 1) \\ & - (27 + 20 \eta - 128 \eta^2 + 80 \eta^3) s^{-1} J(c, s, 1) \} \\ & + f \cos \theta \{ 2 (-51 + 183 \eta - 180 \eta^2 + 48 \eta^3) I(c - 1, s, 1) \\ & + 3 (29 - 7 \eta - 110 \eta^2 + 120 \eta^3 - 32 \eta^4) s^{-1} J(c - 1, s, 1) \} \\ & + (1 - \eta) a^2 f' \cos \theta \{ 2 (1 - 4 \eta) I(c - 1, s, 3) \\ & - (5 + 2 \eta - 8 \eta^2) s^{-1} J(c - 1, s, 3) \} \\ & - (3 - \eta) a^2 f' \cos \theta \{ 2 (5 - 4 \eta) I(c + 1, s, 3) \\ & + (3 - 10 \eta + 8 \eta^2) s^{-1} J(c + 1, s, 3) \} \\ & + 2 a^3 I(c, s, 3) \{ 47 - 70 \eta + 16 \eta^2 - (27 - 44 \eta + 8 \eta^2) \cos^2 \theta \} \\ & + a^3 s^{-1} J(c, s, 3) \{ 3 - 102 \eta + 140 \eta^2 - 32 \eta^3 \\ & + (9 + 56 \eta - 88 \eta^2 + 16 \eta^3) \cos^2 \theta \}, \\ Q_3(\theta) = & \frac{7 (3 - \eta) a^2 \cos \theta}{f^3} [a (1 + \cos \theta) - (f' + R_1) (1 + \cos \theta_1)] \\ & + \frac{(1 - \eta) a^2 \cos^2 \theta}{2 f'^2} \left[\operatorname{cosec}^2 \frac{\theta}{2} - \frac{(f' + R_1) a}{R_1^2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\theta_1}{2} \right] \\ & + \frac{a}{f'^2 R_1} [(R_1 - a) (a (1 - \eta) - 7 (3 - \eta) f \cos \theta) \\ & - 7 (3 - \eta) a^2 \cos^2 \theta - (11 - 3 \eta) a f' \cos \theta + (17 - 5 \eta) f'^2], \end{aligned}$$

$$Q_4(\theta) = -4 a^5 (3 - 15 \eta + 4 \eta^2) - a^5 \cos^2 \theta (75 - 260 \eta + 96 \eta^2) \\ + 2 a^4 f' \cos \theta (52 - 187 \eta + 56 \eta^2) + a^4 f' \cos^3 \theta (77 - 264 \eta + 96 \eta^2) \\ + 8 a^4 f \cos \theta (2 - 8 \eta + 3 \eta^2) - a^3 f'^2 (37 - 122 \eta + 32 \eta^2) \\ - 16 a^3 f'^2 \cos^2 \theta (9 - 32 \eta + 10 \eta^2) + a^2 f'^3 \cos \theta (87 - 314 \eta + 88 \eta^2) \\ - 2 a f'^4 (8 - 31 \eta + 8 \eta^2), \quad (3.6)$$

$$Q_5(\theta) = (1 - \eta) a \{ 2 (2 + 9 \eta - 4 \eta^2 - 16 \eta^3) I(c - 2, s, 1) \\ + (4 - 7 \eta - 30 \eta^2 + 8 \eta^3 + 32 \eta^4) s^{-1} J(c - 2, s, 1) \} \\ + (3 - \eta) a \{ -2 (22 - 47 \eta + 44 \eta^2 - 16 \eta^3) I(c, s, 1) \\ + (12 + 11 \eta - 82 \eta^2 + 88 \eta^3 - 32 \eta^4) s^{-1} J(c, s, 1) \} \\ + f \cos \theta \{ 2 (39 - 109 \eta + 162 \eta^2 - 120 \eta^3 + 32 \eta^4) I(c - 1, s, 1) \\ - (27 - 27 \eta - 128 \eta^2 + 300 \eta^3 - 240 \eta^4 + 64 \eta^5) \\ \times s^{-1} J(c - 1, s, 1) \} \\ - (1 - \eta) a^2 f' \cos \theta \{ 2 (1 - 4 \eta) I(c - 1, s, 3) \\ - (5 + 2 \eta - 8 \eta^2) s^{-1} J(c - 1, s, 3) \} \\ + (3 - \eta) a^2 f' \cos \theta \{ 2 (5 - 4 \eta) I(c + 1, s, 3) \\ + (3 - 10 \eta + 8 \eta^2) s^{-1} J(c + 1, s, 3) \} \\ + 2 a^3 I(c, s, 3) \{ -44 + 61 \eta - 28 \eta^2 + (24 - 35 \eta + 20 \eta^2) \cos^2 \theta \} \\ + a^3 s^{-1} J(c, s, 3) \{ -18 + 81 \eta - 122 \eta^2 + 56 \eta^3 \\ + (6 - 35 \eta + 70 \eta^2 - 40 \eta^3) \cos^2 \theta \}, \quad (3.7)$$

and

$$Q_6(\theta) = a^5 (5 - 48 \eta + 32 \eta^2) - 8 a^5 \cos^2 \theta (22 \eta - 25 \eta^2 + 8 \eta^3) \\ - a^4 f' \cos \theta (23 - 306 \eta + 232 \eta^2 - 32 \eta^3) \\ + 4 a^4 f' \cos^3 \theta (45 \eta - 52 \eta^2 + 16 \eta^3) + 8 a^4 f \cos \theta (5 \eta - 6 \eta^2 + 2 \eta^3) \\ + a^3 f'^2 (13 - 114 \eta + 64 \eta^2) + 2 a^3 f'^2 \cos^2 \theta (13 - 200 \eta + 172 \eta^2 - 32 \eta^3) \\ - a^2 f'^3 \cos \theta (29 - 266 \eta + 184 \eta^2 - 16 \eta^3) \\ + 2 a f'^4 (4 - 27 \eta + 16 \eta^2). \quad (3.8)$$

In equation (3.5) we have

$$R_1 \cos \theta_1 = a \cos \theta - f',$$

and it may be noted that $Q_3(\theta)$ is finite on the axis $\theta = 0$. We define the integrals $I(m, s, n)$ and $J(m, s, n)$ which occur in equations (3.4) and (3.7) as

$$I(m, s, n) = \int_0^1 \frac{\lambda^m \cos(s \log \lambda)}{R_\lambda^n} d\lambda, \quad J(m, s, n) = \int_0^1 \frac{\lambda^m \sin(s \log \lambda)}{R_\lambda^n} d\lambda,$$

where $R_\lambda^2 = x^2 + y^2 + (z - \lambda f')^2$. Further, we have $4s^2 = 3 - 4\eta^2$ and $c = 3/2 - \eta$.

Since the expressions (3.1) and (3.2) do not lend themselves so readily to numerical computation as the expressions for the stresses in series of spherical harmonics, we now give these latter expressions. These can be found by using equations (2.2) to (2.5) together with equations (3.16), (3.18), (4.5) and (4.7) of SH. An alternative method is to obtain solutions of the equations satisfied by the displacement components as series of spherical harmonics suitable for the region $r > a$, the coefficients of the harmonics in these series being found from the condition that the boundary $r = a$ of the hollow is stress free. The additional stresses $\widehat{r r}_1$ and $\widehat{r \theta}_1$ are given by

$$\widehat{r r}_1 = - \frac{\mu A}{(a f')^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{n(n-1)(n^2 + 3n - 2\eta) U_0(n)}{(2n-1) W(n)} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} - \frac{(n+1) U_1(n)}{(2n+3) W(n)} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+3} \right] \left(\frac{a}{f}\right)^n P_n(\cos \theta), \quad (3.9)$$

and

$$\widehat{r \theta}_1 = \frac{\mu A}{(a f')^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(n-1)(n^2 - 2 + 2\eta) U_0(n)}{(2n-1) W(n)} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} - \frac{U_1(n)}{(2n+3) W(n)} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+3} \right] \left(\frac{a}{f}\right)^n T_n^1(\cos \theta), \quad (3.10)$$

where

$$W(n) = n^2 + (1 - 2\eta)n + 1 - \eta,$$

$$U_0(n) = f^2(2n+1)(n+3-4\eta) - a^2(2n-1)(n+1),$$

$$U_1(n) = n(n-1)(n+2)[f^2(2n+3)(n+3-4\eta) - a^2(2n+1)(n+1)] - 4a^2(2n+1)(1-\eta^2).$$

The stresses $\widehat{\theta\theta}$ and $\widehat{\varphi\varphi}$ on the boundary $r = a$ are obtained as

$$\left. \begin{aligned} \widehat{\theta\theta} = & \frac{2\mu A}{(af)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V_0(n)}{(2n+3)(n+2)W(n)} \left(\frac{a}{f}\right)^n P_n(\cos\theta) \\ & + \frac{2\mu A(1-\eta)\cot\theta}{(af)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_1(n)}{(2n+3)(n+2)W(n)} \left(\frac{a}{f}\right)^n T_n^1(\cos\theta), \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

and

$$\left. \begin{aligned} \widehat{\varphi\varphi} = & \frac{2\mu A}{(af)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V_2(n)}{(2n+3)(n+2)W(n)} \left(\frac{a}{f}\right)^n P_n(\cos\theta) \\ & - \frac{2\mu A(1-\eta)\cot\theta}{(af)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_1(n)}{(2n+3)(n+2)W(n)} \left(\frac{a}{f}\right)^n T_n^1(\cos\theta), \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

where

$$\begin{aligned} V_0(n) = & a^2(n+1)[4n^5 + 4(4-\eta)n^4 + (19-16\eta)n^3 \\ & + (14-19\eta-8\eta^2)n^2 + 2(8-3\eta-8\eta^2)n + 6(1-\eta^2)] \\ & - f^2(2n+1)(2n+3)n(n+2)(n+3-4\eta)(n-\eta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_1(n) = & a^2[4n^4 + 20n^3 + (27-8\eta)n^2 + (9-16\eta)n - 6\eta] \\ & - f^2(2n+1)(2n+3)(n+2)(n+3-4\eta) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} V_2(n) = & a^2(n+1)[4\eta n^5 - 4(1-4\eta)n^4 - (8-19\eta+8\eta^2)n^3 \\ & + (5+6\eta-24\eta^2)n^2 + 2(8-11\eta^2)n + 6(1-\eta^2)] \\ & - f^2(2n+1)(2n+3)n(n+2)(n+3-4\eta)(\eta n-1). \end{aligned}$$

To illustrate the variation of the stresses $\widehat{\theta\theta}$ and $\widehat{\varphi\varphi}$ on the boundary $r = a$ these stresses have been calculated for different values of f and η . These calculations were performed by truncating each of the series in (3.11) and (3.12) after N terms, N being chosen so that the truncation error in each case is sufficiently small to ensure the calculated values of the stresses are correct to four decimal places. The sums of the series to N terms were then calculated on the University of Durham Computing Laboratory Pegasus Computer using a method due to CLENSHAW [8]. The values of the stresses thus obtained are given in Tables 1 and 2 and plotted in Figures 1 to 3. The actual values shown are those of $\widehat{\theta\theta}/\mu A$ and $\widehat{\varphi\varphi}/\mu A$.

Table 1
Elastic Solid Containing a Spherical Hollow. Values of $\widehat{\theta\theta}/\mu A$ on $r = a$

θ	$\eta = 0.2$			$\eta = 0.4$
	$f = 2$	$f = 4$	$f = 10$	$f = 2$
0°	-9.2069	-0.8371	-0.0814	-9.9313
10°	5.7950	0.6857	0.0709	6.6079
20°	+0.5016	0.2950	0.0417	0.4508
30°	4.6533	+0.1871	+0.0003	+3.6740
40°	5.9566	0.6148	0.0472	5.0752
50°	5.6344	0.9030	0.0909	4.9113
60°	4.7072	1.0334	0.1252	4.1478
70°	3.6822	1.0308	0.1461	3.2651
80°	2.7550	0.9357	0.1526	2.4509
90°	1.9795	0.7870	0.1458	1.7604
100°	1.3545	0.6156	0.1280	1.1971
110°	0.8611	0.4427	0.1026	0.7471
120°	0.4771	0.2818	0.0731	0.3930
130°	0.1828	0.1407	0.0426	0.1188
140°	-0.0380	0.0234	0.0139	-0.0889
150°	0.1979	-0.0683	-0.0106	0.2405
160°	0.3060	0.1337	0.0293	0.3436
170°	0.3685	0.1729	0.0410	0.4034
180°	0.3889	0.1859	0.0449	0.4231

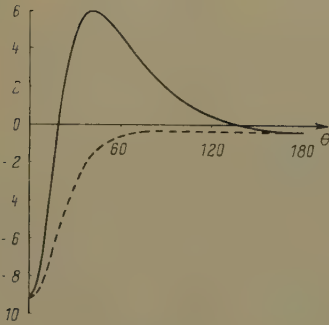


Figure 1
Elastic solid containing a spherical hole.
Graphs of $\widehat{\theta\theta}/\mu A$ and $\widehat{\varphi\varphi}/\mu A$ for $f = 2$,
 $\eta = 0.2$. — $\widehat{\theta\theta}/\mu A$; --- $\widehat{\varphi\varphi}/\mu A$.

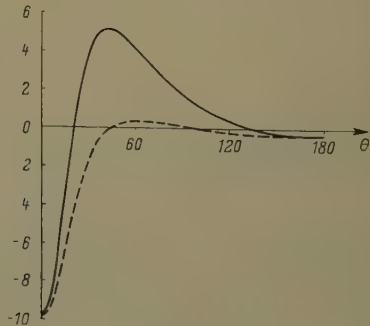


Figure 2
Elastic solid containing a spherical hole.
Graphs of $\widehat{\theta\theta}/\mu A$ and $\widehat{\varphi\varphi}/\mu A$ for $f = 2$,
 $\eta = 0.4$. — $\widehat{\theta\theta}/\mu A$; --- $\widehat{\varphi\varphi}/\mu A$.

Table 2
Elastic Solid Containing a Spherical Hollow. Values of $\widehat{\varphi}\widehat{\varphi}/\mu A$ on $r = a$

θ	$\eta = 0.2$			$\eta = 0.4$
	$f = 2$	$f = 4$	$f = 10$	$f = 2$
0°	-9.2069	-0.8371	-0.0814	-9.9313
10°	7.9420	0.7940	0.0790	8.1241
20°	5.3457	0.6801	0.0721	4.5680
30°	3.1113	0.5318	0.0620	1.7761
40°	1.7288	0.3866	0.0505	0.3088
50°	0.9923	0.2685	0.0393	+0.2694
60°	0.6275	0.1861	0.0298	0.4042
70°	0.4560	0.1367	0.0230	0.3513
80°	0.3811	0.1131	0.0190	0.2327
90°	0.3533	0.1074	0.0179	0.1019
100°	0.3477	0.1125	0.0191	-0.0196
110°	0.3518	0.1236	0.0221	0.1245
120°	0.3595	0.1370	0.0263	0.2112
130°	0.3678	0.1504	0.0308	0.2806
140°	0.3752	0.1626	0.0353	0.3344
150°	0.3812	0.1726	0.0393	0.3743
160°	0.3855	0.1799	0.0423	0.4018
170°	0.3881	0.1844	0.0443	0.4178
180°	0.3889	0.1859	0.0449	0.4231

It is of interest to compare the variation of the stress $\widehat{\theta}\widehat{\theta}$ in this problem with the variation of the hoop stress round the boundary of a circular hole in an infinite plate in a state of generalized plane stress due to the action of a force nucleus at a point of the plate, the nucleus being directed radially outwards from the centre of the hole. This problem has been discussed by HOLGATE [9] and the stress curves given by him are found to be similar to the curves given in Figures 1 to 3.

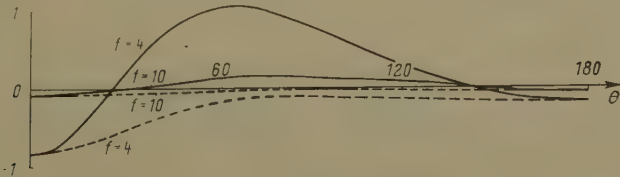


Figure 3
Elastic solid containing a spherical hole. Graphs of $\widehat{\theta}\widehat{\theta}/\mu A$ and $\widehat{\varphi}\widehat{\varphi}/\mu A$ for $f = 4$ and $f = 10$, $\eta = 0.2$ (note different scale from Figures 1 and 2). — $\widehat{\theta}\widehat{\theta}/\mu A$; --- $\widehat{\varphi}\widehat{\varphi}/\mu A$.

4. Force Nuclei Acting at Internal Points of an Elastic Sphere

We now consider the problem of an elastic sphere under the action of two equal and opposite force nuclei, magnitude F , applied at points on a diameter of the sphere equidistant from the centre, the axes of the nuclei being directed along this diameter. Since the case when the forces act at the surface of the sphere has been discussed by STERNBERG and ROSENTHAL [10], we suppose the nuclei to act at internal points, the boundary of the sphere being unstressed. As the method given in SH for an infinite solid containing a spherical hollow can be extended to an elastic sphere (see SH, p. 250), it is possible to find closed form expressions for the stresses similar to those found in section 3. Since it is again more convenient for numerical work to use expressions for the stresses as infinite series of spherical harmonics, we give only these expressions.

If the nuclei act at the points whose cartesian coordinates are $(0, 0, f)$ and $(0, 0, -f)$, ($f < a$), and are directed radially outwards from the centre of the sphere, the stresses due to these nuclei acting in an infinite unbounded elastic solid are, when $f < r$,

$$\widehat{r r}_0 = -\frac{4 \mu A}{f^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2 n (4 n^2 + 6 n - 2 \eta)}{(4 n - 1)} \left(\frac{f}{r} \right)^{2n+1} - \frac{(2 n + 1) (2 n + 2) (2 n - 2 + 4 \eta)}{(4 n + 3)} \left(\frac{f}{r} \right)^{2n+3} \right] P_{2n}(\cos \theta), \quad (4.1)$$

$$\widehat{r \theta}_0 = \frac{4 \mu A}{f^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(4 n^2 - 2 + 2 \eta)}{(4 n - 1)} \left(\frac{f}{r} \right)^{2n+1} - \frac{(2 n + 2) (2 n - 2 + 4 \eta)}{(4 n + 3)} \left(\frac{f}{r} \right)^{2n+3} \right] T_n^1(\cos \theta), \quad (4.2)$$

$$\widehat{\theta \theta}_0 = \frac{4 \mu A}{f^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2 n (4 n^2 - 4 n - 1 + 2 \eta)}{(4 n - 1)} \left(\frac{f}{r} \right)^{2n+1} - \frac{(2 n + 1)^2 (2 n - 2 + 4 \eta)}{(4 n + 3)} \left(\frac{f}{r} \right)^{2n+3} \right] P_{2n}(\cos \theta) + \frac{4 \mu A \cot \theta}{f^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2 n - 4 + 4 \eta)}{(4 n - 1)} \left(\frac{f}{r} \right)^{2n+1} - \frac{(2 n - 2 + 4 \eta)}{(4 n + 3)} \left(\frac{f}{r} \right)^{2n+3} \right] T_{2n}^1(\cos \theta) \quad (4.3)$$

and

$$\widehat{\varphi\varphi_0} = \frac{4\mu A}{f^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2n(2n-8n\eta+3-2\eta)}{(4n-1)} \left(\frac{f}{r}\right)^{2n+1} - \frac{(2n+1)(2n-2+4\eta)}{(4n+3)} \left(\frac{f}{r}\right)^{2n+3} \right] P_{2n}(\cos\theta) - \frac{4\mu A \cot\theta}{f^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-4+4\eta)}{(4n-1)} \left(\frac{f}{r}\right)^{2n+1} - \frac{(2n-2+4\eta)}{(4n+3)} \left(\frac{f}{r}\right)^{2n+3} \right] T_{2n}^1(\cos\theta), \quad (4.4)$$

where $F = 16\pi\mu A(1-\eta)$. When $r < f$, the expressions for the stresses are obtained from equations (4.1) to (4.4) by replacing n by $-(n+1)$ in the n -th term of each series.

The additional stresses $\widehat{r r_1}$ and $\widehat{r \theta_1}$ which must be added to the stresses $\widehat{r r_0}$ and $\widehat{r \theta_0}$ respectively to give the stress distribution due to the force nuclei acting in the elastic sphere, can be found by methods similar to those given in section 3 for the solid containing a spherical hollow. We find that

$$\widehat{r r_1} = \frac{16\mu A}{(af)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{(n+1)(2n+1)(2n^2-n-1-\eta)A_0(n)}{(4n+3)C(n)} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n} + \frac{nA_1(n)}{(4n-1)C(n)} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n-2} \right] \left(\frac{f}{a}\right)^{2n+1} P_{2n}(\cos\theta), \quad (4.5)$$

and

$$\widehat{r \theta_1} = \frac{8\mu A}{(af)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{(n+1)(4n^2+4n-1+2\eta)A_0(n)}{(4n+3)C(n)} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n} + \frac{A_1(n)}{(4n-1)C(n)} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n-2} \right] \left(\frac{f}{a}\right)^{2n+1} T_{2n}^1(\cos\theta), \quad (4.6)$$

where

$$C(n) = 4n^2 + 2(1+2\eta)n + 1 + \eta,$$

$$A_0(n) = a^2(4n+3)n - f^2(4n+1)(n-1+2\eta),$$

$$A_1(n) = (n+1)(4n^2-1)[a^2(4n+1)n - f^2(4n-1)(n-1+2\eta)] + a^2(4n+1)(1-\eta^2).$$

Further, we obtain the stresses $\widehat{\theta\theta}$ and $\widehat{\varphi\varphi}$ on the surface of the sphere as

$$\left. \begin{aligned} \widehat{\theta\theta} = & \frac{8\mu A}{(af)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_0(n)}{(2n-1)(4n-1)C(n)} \left(\frac{f}{a}\right)^{2n+1} P_{2n}(\cos\theta) \\ & + \frac{8\mu A(1-\eta)\cot\theta}{(af)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_1(n)}{(2n-1)(4n-1)C(n)} \left(\frac{f}{a}\right)^{2n+1} T_{2n}^1(\cos\theta), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

and

$$\left. \begin{aligned} \widehat{\varphi\varphi} = & \frac{8\mu A}{(af)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_2(n)}{(2n-1)(4n-1)C(n)} \left(\frac{f}{a}\right)^{2n+1} P_{2n}(\cos\theta) \\ & - \frac{8\mu A(1-\eta)\cot\theta}{(af)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_1(n)}{(2n-1)(4n-1)C(n)} \left(\frac{f}{a}\right)^{2n+1} T_{2n}^1(\cos\theta), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

where

$$\begin{aligned} B_0(n) = & a^2 n [128 n^5 + 64 (1 + \eta) n^4 - 40 n^3 - 4 (13 - 8 \eta) (1 + \eta) n^2 \\ & + 2 n + (3 - 2 \eta) (1 + \eta)] \\ & - f^2 (16 n^2 - 1) (4 n^2 - 1) (2 n + 1 + \eta) (n - 1 + 2 \eta), \\ B_1(n) = & a^2 [32 n^4 - 16 n^3 - 2 (9 + 8 \eta) n^2 + n + 1 + \eta] \\ & - f^2 (16 n^2 - 1) (2 n - 1) (n - 1 + 2 \eta), \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} B_2(n) = & a^2 n [128 \eta n^5 + 64 (1 + \eta) n^4 + 8 (8 - 5 \eta - 8 \eta^2) n^3 \\ & - 20 (1 + \eta) n^2 - 2 (2 - \eta - 2 \eta^2) n + 1 + \eta] \\ & - f^2 (16 n^2 - 1) (4 n^2 - 1) (2 \eta n + 1 + \eta) (n - 1 + 2 \eta). \end{aligned}$$

To illustrate the variation of the stresses $\widehat{\theta\theta}$ and $\widehat{\varphi\varphi}$ over the surface of the sphere, these stresses have been calculated for different values of f and η using equations (4.7) and (4.8). The values obtained are given in Tables 3 and 4 and plotted in Figures 4 to 6, the actual values shown being those of $\widehat{\theta\theta}/8\mu A$ and $\widehat{\varphi\varphi}/8\mu A$. Since the stresses have mirror symmetry about the plane $z = 0$, only the values for θ between 0° and 90° are given.

In conclusion, I wish to thank the University of Durham Computing Laboratory for the facilities placed at my disposal.

Table 3
Elastic Sphere. Values of $\widehat{\theta\theta}/8\mu A$ on $r = a$

θ	$\eta = 0.2$			$\eta = 0.4$
	$f = 0.1$	$f = 0.3$	$f = 0.5$	$f = 0.5$
0°	+0.5834	+2.1196	+5.4008	+5.0576
10°	0.5582	1.9592	4.4333	4.1131
20°	0.4867	1.5469	2.5456	2.2776
30°	0.3796	1.0345	1.0773	0.8630
40°	0.2523	0.5580	0.2966	0.1241
50°	0.1214	0.1858	-0.0421	-0.1855
60°	0.0027	-0.0717	0.1695	0.2939
70°	-0.0911	0.2322	0.2103	0.3230
80°	0.1509	0.3178	0.2203	0.3266
90°	0.1715	0.3445	0.2217	0.3259

Table 4
Elastic Sphere. Values of $\widehat{\varphi\varphi}/8\mu A$ on $r = a$

θ	$\eta = 0.2$			$\eta = 0.4$
	$f = 0.1$	$f = 0.3$	$f = 0.5$	$f = 0.5$
0°	+0.5834	+2.1196	+5.4008	+5.0576
10°	0.5580	1.9833	4.7091	4.2918
20°	0.4855	1.6205	3.2059	2.6901
30°	0.3761	1.1384	1.7661	1.2588
40°	0.2445	0.6464	0.7366	0.3223
50°	0.1076	0.2170	0.0859	-0.2151
60°	-0.0182	-0.1170	-0.3035	0.5075
70°	0.1188	0.3493	0.5259	0.6607
80°	0.1835	0.4846	0.6396	0.7340
90°	0.2058	0.5288	0.6745	0.7557

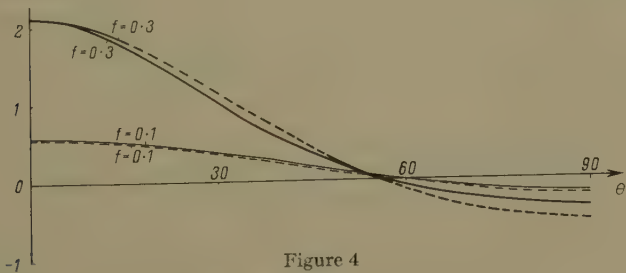


Figure 4
Elastic sphere. Graphs of $\widehat{\theta\theta}/8\mu A$ and $\widehat{\varphi\varphi}/8\mu A$ for $f = 0.1$ and $f = 0.3$, $\eta = 0.2$.
— $\widehat{\theta\theta}/8\mu A$; --- $\widehat{\varphi\varphi}/8\mu A$.

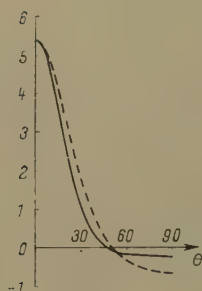


Figure 5

Elastic sphere. Graphs of $\widehat{\theta\theta}/8\mu A$ and $\widehat{\varphi\varphi}/8\mu A$ for $f = 0.5$, $\eta = 0.2$ (note different scale from Figure 4).

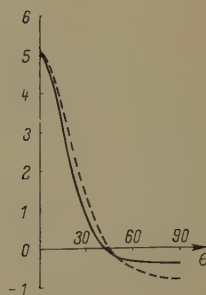


Figure 6

Elastic sphere. Graphs of $\widehat{\theta\theta}/8\mu A$ and $\widehat{\varphi\varphi}/8\mu A$ for $f = 0.5$, $\eta = 0.4$ (note different scale from Figure 4).

REFERENCES

- [1] R. D. MINDLIN, *Physics* 7, 195–202 (1936).
- [2] B. SEN, *Bull. Calcutta math. Soc.* 22, 73–83 (1940).
- [3] W. R. DEAN, H. W. PARSONS and I. N. SNEDDON, *Proc. Camb. phil. Soc.* 40, 5–19 (1944).
- [4] W. D. COLLINS, *Mathematika* 1, 125–130 (1954).
- [5] W. D. COLLINS, *Proc. London math. Soc.* 9 (3), 242–252 (1959).
- [6] A. E. H. LOVE, *Mathematical Theory of Elasticity* (Cambridge, 1927), p. 185–186.
- [7] T. M. MACROBERT, *Spherical Harmonics* (Methuen, 1947), p. 125.
- [8] C. W. CLENSHAW, *M. T. A. C.* 9, 118–120 (1955).
- [9] S. HOLGATE, *Proc. Camb. phil. Soc.* 40, 172–188 (1944).
- [10] E. STERNBERG and F. ROSENTHAL, *J. appl Mech.* 19, 413–421 (1952).

Résumé

Dans cette communication, nous donnons des expressions pour les efforts causés par des noyaux de forces agissant à certains points

- (i) d'un solide élastique contenant une cavité sphérique;
- (ii) d'une boule élastique.

Dans le premier cas, on obtient des expressions en séries de fonctions de LEGENDRE. Des expressions équivalentes contenant des intégrales et des fonctions élémentaires sont également obtenues. Dans le deuxième cas, on obtient seulement des expressions en fonction de LEGENDRE. Dans chaque cas, des résultats numériques sont obtenus pour les efforts sur la surface sphérique.

(Received: July 17, 1959.)

Über die Erzeugung von hohen, kurzzeitigen Magnetfeldern

Von PIERO COTTI, Zürich¹⁾

1. Einleitung

Die Erzeugung von Dauermagnetfeldern über 60000 A/cm (75000 Oe) erfordert bekanntlich einen so grossen apparativen Aufwand, dass nur sehr wenige Laboratorien über die entsprechenden Installationen verfügen. Die höchsten Dauermagnetfelder, die bis jetzt hergestellt werden konnten, liegen bei etwa 80000 A/cm (100000 Oe). Wie KAPITZA [1]²⁾ aber schon 1924 gezeigt hat, ist es mit einem relativ bescheidenen Aufwand möglich, drei- bis viermal so starke Magnetfelder zu erzeugen, sobald man sich darauf beschränkt, diese nur für ein sehr kurzes Zeitintervall (Grössenordnung Millisekunden) zur Verfügung zu halten.

KAPITZA verwendete zuerst eine Serie von Akkumulatoren als Energiequelle. Mit einem mechanischen Schalter wurde diese während einiger Hundertstelsekunden über eine kleine Spule kurzgeschlossen, wobei Magnetfelder bis zu 100000 A/cm erzeugt wurden. Um noch höhere Magnetfelder zu erreichen und diese auch in einem grösseren Volumen von mehreren Kubikzentimetern zur Verfügung zu haben, benützte KAPITZA [2] später seine berühmt gewordene Dynamomaschine als Energiequelle. Er konnte so während einer Impulsdauer von rund 30 ms in einem Volumen von ungefähr 6 cm³ Magnetfelder bis zu 256000 A/cm (320000 Oe) erzeugen.

Eine starke Reduktion des apparativen Aufwandes brachte 1926 die Idee von WALL [3], eine Batterie von Kondensatoren als Energiequelle zu benützen. Die Kondensatorenbatterie von WALL wies eine Kapazität von 1400 μ F auf und konnte auf maximal 2000 V aufgeladen werden. Durch die Entladung dieser Kondensatorenbatterie über eine kleine Hochfeldspule konnte WALL Magnetfelder bis zu 182000 A/cm (228000 Oe) erzeugen, wobei allerdings die Hochfeldspule infolge der Biot-Savart-Kräfte explodierte. Diese Technik wurde seither in fast allen Laboratorien [4–10], die sich mit der Erzeugung von kurzzeitigen, hohen Magnetfeldern beschäftigt haben, verwendet.

Im Verlaufe der letzten 5 Jahre sind am Institut für kalorische Apparate und Kältetechnik der ETH einige Apparaturen gebaut worden, die ebenfalls nach diesem Prinzip arbeiten. Diese Apparaturen wurden hauptsächlich für die Messung der Änderung des elektrischen Widerstandes von reinen Metallen in

¹⁾ ETH. Institut für kalorische Apparate und Kältetechnik.

²⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 32.

hohen Magnetfeldern benützt. Dazu sind relativ lange Impulszeiten erforderlich, denn zu schnell veränderliche Felder werden im allgemeinen die gut leitenden Metallproben nicht genügend durchdringen und sie auch durch starke Wirbelströme aufheizen. Es wurden hier zum Beispiel während einer Impulsdauer von ungefähr einer Millisekunde in einem Volumen von $0,5 \text{ cm}^3$ Magnetfelder bis zu $320\,000 \text{ A/cm}$ ($400\,000 \text{ Oe}$), oder während etwa 100 Millisekunden und in einem Volumen von 10 cm^3 Magnetfelder bis zu $80\,000 \text{ A/cm}$ ($100\,000 \text{ Oe}$) erzeugt.

Über die Erzeugung noch höherer Felder (bis zu $750\,000 \text{ Oe}$) während einer Zeit von grössenordnungsmässig $100 \mu\text{s}$ sind in den letzten Jahren drei ausführliche Arbeiten erschienen [6, 7, 18]. Ergänzend soll hier im folgenden die Erzeugung von Hochfeldern während relativ langer Zeiten und die ökonomisch günstigste Dimensionierung einer solchen Hochfeldapparatur behandelt werden. Die hier angeführten Berechnungen folgen zum Teil einer wertvollen Arbeit von CHAMPION [4], sind aber speziell unseren Zwecken angepasst worden.

Die Messmethode, die hier angewendet wird, soll am Schluss kurz beschrieben und eine Messung der magnetischen Widerstandsänderung von Kupfer gezeigt werden.

2. Theorie

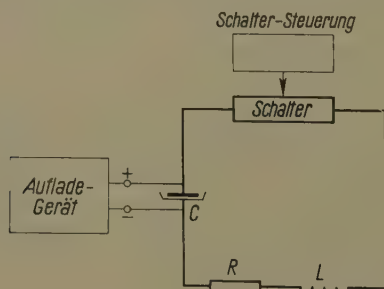
Figur 1 zeigt das prinzipielle Schaltbild unserer Apparatur. Die Stromstärke in einem solchen Entladungskreis wird

$$I(t) = \frac{U}{\omega L} e^{-tR/2L} \sin \omega t, \quad (1)$$

wobei

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (2)$$

U bezeichnet hier die Aufladespannung der Kondensatorenbatterie, L die Selbstinduktion der Hochfeldspule, C die Kapazität der Kondensatorenbatterie und R den Ohmschen Widerstand des Entladungskreises.



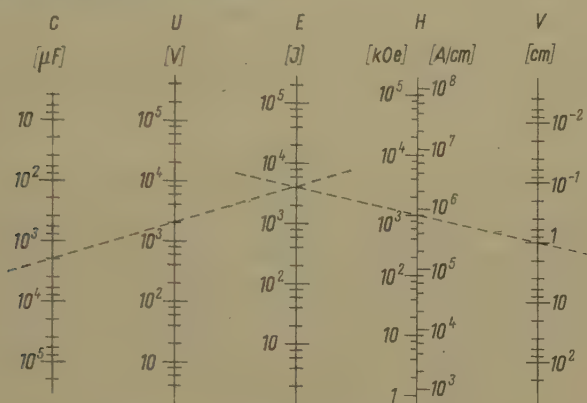
Figur 1

Prinzipielles Schaltschema der Hochfeldapparatur.

Diese Beziehung gilt sowohl für reelle als auch für imaginäre ω und geht im aperiodischen Grenzfall $\omega \rightarrow 0$ gegen den Ausdruck

$$I(t) = \frac{U}{L} t e^{-t R/2L}. \quad (3)$$

Wie die Erfahrung zeigt, liegt die Art unserer Entladungen meistens in der Nähe dieses aperiodischen Grenzfalles.



Figur 2

Nomogramm. Das maximal erzeugbare Magnetfeld H als Funktion der eingesetzten Energie E und des inneren Volumens V der Hochfeldspule (energetischer Idealfall). Zur Auswertung sind die drei linken und die drei rechten Funktionsskalen je durch eine Gerade zu verbinden (C und U sind Kapazität und Aufladespannung der Kondensatorenbatterie).

Im energetisch günstigsten Fall würde die gesamte, ursprünglich in den Kondensatoren aufgespeicherte, elektrische Energie $E = C U^2/2$ im Augenblick des Feldmaximums lediglich in Form von magnetischer Energie im inneren Volumen der Hochfeldspule stecken. In Giorgi-Einheiten würde also

$$E = \frac{C U^2}{2} = \frac{\mu_0 H_{max}^2}{2} V, \quad (4)$$

wobei H_{max} das Feldmaximum im Mittelpunkt der Spule und V das innere Volumen der Spule bezeichnet.

Das Nomogramm von Figur 2 gibt eine Darstellung dieses Zusammenhanges. Wir werden allerdings sehen, dass der Wirkungsgrad dieser Energieumformung selten über 50% liegt. Es ist zweckmässig, diesen Wirkungsgrad mit K^2 zu bezeichnen. Dann wird

$$H_{max} = K U \sqrt{\frac{250 C}{\pi V}}, \quad 0 < K < 1, \quad (5)$$

H_{max} [A/cm], C [μ F], V [cm^3], U [V].

Nach CHAMPION kann K in zwei Faktoren aufgespalten werden:

$$K = J S \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 < J < 1, \\ 0 < S < 1. \end{array} \right. \quad (6)$$

Der Faktor J berücksichtigt die Ohmschen Energieverluste, während S der Tatsache Rechnung trägt, dass in einer Spule die magnetische Feldenergie nicht nur im Spuleninnern konzentriert werden kann. CHAMPION, der sich ausführlich mit diesen beiden Faktoren auseinandergesetzt hat, gibt einen expliziten Ausdruck für S . Tabelle 1 wurde einer seiner graphischen Darstellungen entnommen.

Tabelle 1
Der Faktor S als Funktion von α und β (siehe auch Figur 4)

$\beta \backslash \alpha$	1,1	1,5	2	4	8
0,5	0,60	0,50	0,40	0,23	0,12
1	0,82	0,70	0,57	0,32	0,17
2	0,96	0,83	0,70	0,41	0,21
4	0,98	0,88	0,75	0,47	0,26
8	0,99	0,88	0,75	0,48	0,28

Wie man sich leicht überlegt, gilt für den Faktor J

$$J = \frac{I_{max}}{I_{max}(R=0)}. \quad (7)$$

Mit der Substitution

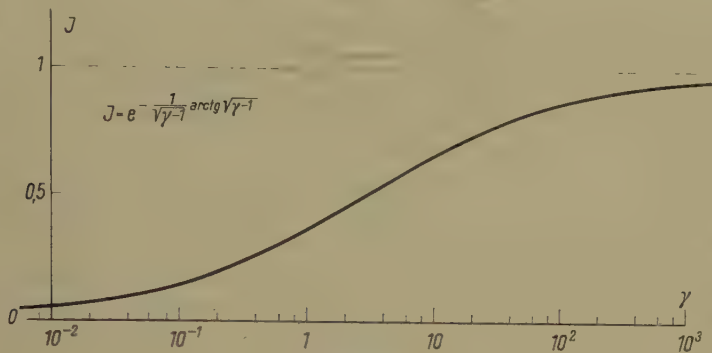
$$\gamma = \frac{4L}{R^2 C} \quad (8)$$

erhält man aus Gleichung (1)

$$J = e^{-(1/\sqrt{\gamma-1}) \operatorname{arctg} \sqrt{\gamma-1}}. \quad (9)$$

J wächst monoton mit γ (Figur 3). $\gamma = 1$ entspricht dem aperiodischen Grenzfall.

Man wird also eine Hochfeldspule so dimensionieren, dass γ möglichst gross und zugleich S nicht zu klein wird. Im Bereiche kleiner γ -Werte ist vor allem die erste Bedingung massgebend, während für γ -Werte über 5 mehr Gewicht auf die zweite Bedingung gelegt werden muss. Ohne eine Nebenbedingung zu stellen, wird man dabei auf den Extremfall einer Spule geführt, die aus einer einzelnen Windung von möglichst grossen Dimensionen besteht.



Figur 3
Der Faktor J als Funktion von γ .

Als Nebenbedingung soll die Selbstinduktion L der Hochfeldspule vorgeschrieben werden, da L im wesentlichen die Impulsdauer der Entladung bestimmt. Für eine Spule von rechteckigem Wicklungsquerschnitt gilt bekanntlich (Bezeichnungen nach Figur 4)

$$L = n^2 r_i \lambda(\alpha, \beta) , \tag{10}$$

wobei L in Mikrohenry und r_i in Zentimeter einzusetzen sind, während λ einen Formfaktor bezeichnet, der nur von den relativen Spulenparametern α und β abhängt ($\alpha = r_a/r_i$, $\beta = l/r_i$, siehe Tabelle 2).

Tabelle 2
Der Formfaktor λ , $L = n^2 r_i \lambda$, L in Mikrohenry, r_i in Zentimeter

$\beta \backslash \alpha$	1,1	1,5	2	4	8
0,5	21,5	23,0	25,5	37,5	65
1	14,0	16,5	19,0	31,5	58
2	8,5	10,3	12,9	24,0	47,8
4	4,8	6,2	7,6	15,8	37,0
8	2,55	3,2	4,0	9,3	24,0

Der Ohmsche Widerstand R einer Spule wird

$$R = \frac{\varrho n^2 \pi (\alpha + 1)}{2 f r_i (\alpha - 1) \beta} , \tag{11}$$

wobei f den Füllungsfaktor nach Figur 4 und ϱ den spezifischen Widerstand bezeichnet. Die Tatsache, dass sich ϱ während einer Entladung infolge der Erwärmung der Hochfeldspule verändert, soll vorläufig vernachlässigt werden.

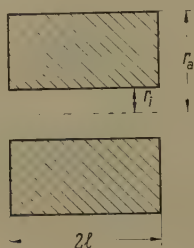
Wenn die Windungszahl n durch die Selbstinduktion L substituiert wird, erhält man für γ

$$\gamma = \frac{16 f^2}{2 \varrho^2} \cdot \frac{r_i^4}{L C} F(\alpha, \beta), \quad (12)$$

wobei

$$F(\alpha, \beta) = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \beta \lambda \right)^2 \quad (13)$$

und somit nur von den relativen Spulenparametern α und β abhängt.



Figur 4

Bezeichnungen der Hochfeldspule: $r_a/r_i = \alpha$; $1/r_i = \beta$; n Windungszahl; ϱ Drahtdurchmesser; f Füllfaktor $= n \varrho^2 \pi / 8 l (r_a - r_i)$.

Der Geometriefaktor F wächst sehr schnell mit α und etwa 1000mal langsamer mit β (Tabelle 3).

Tabelle 3
Der Geometriefaktor $F(\alpha, \beta)$ in $10^{-18} \text{ Hy}^2/\text{cm}^2$

$\beta \backslash \alpha$	1,2	1,5	2	4	8
0,5	1,0	5,29	17,7	126	1670
1	1,74	10,22	40,0	368	2180
2	2,66	17,6	75,0	822	5620
4	3,72	23,0	100	1470	13270
10	3,82	29,2	128	2130	26250

Die energetisch günstigste Dimensionierung der Hochfeldapparatur kann nun aus Gleichung (12) herausgelesen werden. Die Kondensatorenbatterie soll so angelegt werden, dass sie bei relativ kleiner Kapazität auf möglichst hohe Spannungen aufgeladen werden kann (Serieschaltung). Die höchsten Aufladespannungen werden durch den Entladeschalter, die Isolation der Hochfeldspule und nicht zuletzt auch durch Sicherheitsbedingungen beschränkt. Da

ausser der Kapazität C nach (12) auch die Selbstinduktion L möglichst klein sein sollte, ist es grundsätzlich möglich, bei kürzeren Impulsdauern einen grösseren energetischen Wirkungsgrad zu realisieren. L darf aber auch aus energetischen Gründen nicht zu klein gemacht werden, denn die Selbstinduktion der Hochfeldspule muss grössenordnungsmässig grösser als diejenige der Zuleitungen und der Kondensatorenatterie sein, da sich ja die magnetische Energie im Verhältnis der Selbstinduktionen aufteilt.

Gleichung (12) besagt weiter, dass eine beliebige Verkleinerung der Hochfeldspule (r_i) bei gegebener Kondensatorenatterie nicht unbedingt ein höheres Magnetfeld liefert, da γ mit der vierten Potenz von r_i zunimmt und J im Bereich kleiner γ -Werte ebenfalls sehr rasch mit γ wächst.

Der Füllungsfaktor f tritt in Gleichung (12) im Quadrat auf. Da sich ein grosses f , wie man sich leicht überlegt, auch günstig auf die mechanische Widerstandsfähigkeit einer Hochfeldspule auswirkt, ist es in doppelter Hinsicht vorteilhaft, Rechteckprofildraht zu verwenden.

Im allgemeinen wird das innere Volumen der Hochfeldspule und die minimale Impulsdauer der Entladung durch die auszuführenden Messungen vorgeschrieben. Anhand der Thomsonschen Formel kann aus der minimalen Impulsdauer ein Wert für L festgelegt werden:

$$L = \frac{4 \tau_{max}^2}{\pi^2 C}, \quad (14)$$

wobei τ_{max} den Zeitpunkt des Feldmaximums bezeichnet. Bekanntlich ist die Periodendauer von gedämpften Schwingungen immer etwas grösser als der nach der Thomsonschen Formel berechnete Wert. Wie wir gesehen haben, nimmt γ mit α schnell zu. Eine Vergrösserung von α hat allerdings eine Verschlechterung der Homogenität des Magnetfeldes längs der Spulenchse zur Folge. Hat man einmal das grösste α , das sich diesbezüglich noch verantworten lässt, bestimmt, so kann daraus anhand von (10) die Windungszahl n berechnet werden. Bei der Festlegung von α muss ausserdem darauf geachtet werden, dass der Faktor S mit zunehmendem α abnimmt. Eine Vergrösserung von α ist deshalb vor allem dann zweckmässig, wenn der γ -Wert noch kleiner als 5 ist.

3. Die Erwärmung der Hochfeldspule

Da die Erwärmung einer Hochfeldspule im wesentlichen adiabatisch verläuft, gilt hier

$$i^2 \varrho \, dt = c_v \, v \, dT, \quad (15)$$

wobei i die Stromdichte, c_v die spezifische Wärme pro Gramm und v die Dichte bezeichnet.

Wir trennen die Temperatur- und die zeitabhängigen Grössen und integrieren

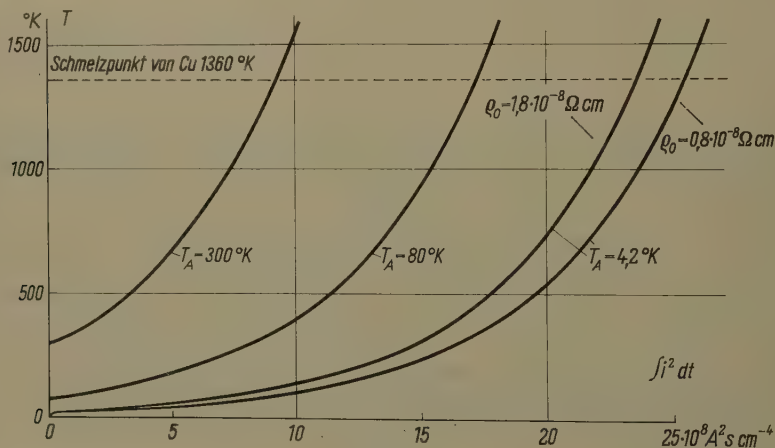
$$\int_0^t i^2 dt = \int_{T_A}^{T_t} \frac{c_v v}{\varrho} dt, \quad (16)$$

wobei T_A die Anfangstemperatur und T_t die Temperatur zur Zeit t bezeichnet.

Für Temperaturen unter 200°K kann das Integral rechts nur numerisch ausgewertet werden. OLSEN [5], der seine Hochfeldspulen in flüssiges Helium getaucht hatte, gibt eine graphische Darstellung dieses Zusammenhanges für Kupferspulen von $1,6 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ cm}$ bzw. $0,8 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ cm}$ spezifischen Restwiderstand. Diese graphische Darstellung geht bis zu Endtemperaturen von 100°K . Bei höheren Temperaturen ist c_v näherungsweise konstant und ϱ proportional zur absoluten Temperatur. Dann wird

$$\frac{T_t}{T_A} = e^{\frac{\varrho_{273}}{273 c_v v} \int_0^t i^2 dt} \quad (17)$$

Anhand dieser Formel wurden in Figur 5 die graphischen Darstellungen von OLSEN erweitert.



Figur 5

Die Temperaturerhöhung der Hochfeldspule als Funktion von $\int i^2 dt$ für drei verschiedene Ausgangstemperaturen, T_A .

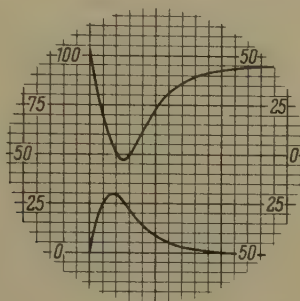
Das Integral $\int i^2 dt$ kann durch das Magnetfeld H ausgedrückt werden, indem für H der Näherungswert $In/2l$ eingesetzt wird. Man erhält so

$$\int i^2 dt \cong \frac{1}{f^2 (r_a - r_i)^2} \int H^2 dt = \frac{H_{\max}^2 p \tau_{\max}}{f^2 (r_a - r_i)^2}, \quad (18)$$

wobei $p \tau_{\max}$ ein Mass für die Dauer der Entladung darstellt. Für eine ideal

sinusförmige Entladung ($R = 0$) wird $p = 1$, während im aperiodischen Grenzfall $p = 1,85$ wird,

Eine kleine Hochfeldspule (Tabelle 4, Nr. 1) würde sich zum Beispiel bei der Erzeugung von 250 000 A/cm während 3 ms von 80° K auf etwa 300° K, von 300° K aber auf rund 1000° K erhitzen. Für die Erzeugung von Magnetfeldern über 200 000 A/cm (während Millisekunden und mehr) ist deshalb eine Vorkühlung der Hochfeldspule mit flüssiger Luft unumgänglich. Aus dem letzten Ausdruck geht jedoch hervor, dass sich die Temperaturerhöhung durch eine



Figur 6

Die Messung der Temperaturerhöhung der Hochfeldspule. Die untere Kurve repräsentiert den Feldverlauf (100 Skt = 2440 A = 468 000 A/cm = 608 000 Oe), während die obere Kurve den Verlauf der Ohmschen Spannung an der Hochfeldspule darstellt (100 Skt = 1270 V). Der ganzen Bildbreite entspricht eine Zeit von 10 ms.

Vergrößerung der Wicklungsstärke wirksam reduzieren lässt. Um die Ausdrücke über die Temperaturerhöhung zu kontrollieren, wurde mit einem Kathodenstrahloszillographen der Verlauf des Ohmschen Widerstandes einer in flüssiger Luft vorgekühlten Spule während einer Entladung gemessen.

Dabei wurde die induktive Komponente der an der Spule auftretenden Spannung mit einer Pick-up-Spule auskompensiert. Die Verschiebung der Maxima demonstriert augenfällig die Vergrößerung des Widerstandes während der Entladung. Nach 2,5 ms beträgt der Ohmsche Widerstand $1,65 \Omega$, was bereits einer Temperatur von 215° K entspricht. Der Füllungs faktor dieser Spule war 0,55 und die Wicklungsstärke 0,6 cm. Um anhand von Formel (17) auf eine Endtemperatur von 215° K zu kommen, muss hier für $\int i^2 dt$ ein Wert von $5,8 \cdot 10^8 \text{ A}^2 \text{ s cm}^{-4}$ eingesetzt werden. Dies entspricht einem $p \tau_{max}$ von 2,1 ms ($H_{max} = 160 000 \text{ A/cm}$).

4. Die Verstärkung der Hochfeldspule

Eine unverstärkte Kupferspule von rechteckigem Wicklungsquerschnitt wird auch bei günstigster Dimensionierung bei Magnetfeldern zwischen 200 000 und 250 000 A/cm durch die Biot-Savart-Kräfte in radialer Richtung aus-

einandergerissen. Bei Impulsdauern in der Grössenordnung von Millisekunden und weniger setzt also nicht die Erwärmung der Hochfeldspule der Erzeugung von Magnetfeldern zuerst eine Grenze!

Für die azimutale Zugbeanspruchung σ einer Hochfeldspule durch die Biot-Savart-Kräfte gilt, unter Vernachlässigung der zusätzlichen Belastung der äusseren Windungen durch den Auflagedruck der inneren Windungen,

$$\sigma(r) = \frac{\mu_0 H^2}{f} \cdot \frac{r_a r - r^2}{(r_a - r)^2}, \quad (19)$$

wobei r den Abstand von der Spulenachse bezeichnet. Bei der Herleitung dieser Formel wurde für H der Näherungswert $I n/2 l$ eingesetzt, der bekanntlich um so genauer stimmt, je länger die betrachtete Spule gegenüber ihrem mittleren Durchmesser ist. Die maximale Zugbeanspruchung tritt für Spulen, deren α grösser als 2 ist, bei $r = r_a/2$, und für Spulen, deren α kleiner oder gleich 2 ist (wo sie bei gleichem H grösser wird), bei $r = r_i$ auf. Für ein H von zum Beispiel 200 000 A/cm ($\alpha = 2$) erhält man für die maximale Zugbeanspruchung ungefähr 50 000 N/cm², was ungefähr dem doppelten Wert der maximal zulässigen Zugbeanspruchung von handelsüblichem Kupfer entspricht. Die stärkere Beanspruchung der inneren Windungen einer Hochfeldspule hat nach mehreren Entladungen eine Ermüdung der Widerstandsfähigkeit zur Folge, indem bei jeder Entladung die inneren Windungen etwas mehr gegen die äusseren Windungen fliessen, bis die Deformation im Innern zu gross und die Spule unterbrochen wird. Einlagige Kupferspulen können schon bei 100 000 A/cm explodieren. Eine unverstärkte Kupferspule, die Felder bis zu 200 000 A/cm aushalten soll, muss deshalb eine möglichst grosse Wicklungsstärke (α gross) aufweisen und wenn möglich, zur Vergrösserung des Füllungsfaktors f , aus Rechteckprofildraht gewickelt werden.

Von den verschiedenen Verstärkungsmöglichkeiten, die hier ausprobiert wurden, haben sich verleimte Glasfasern am besten bewährt³⁾. Solche Glasfasern sind in Glasseidenbandform im Handel erhältlich. Wir haben ein 10 mm breites, etwa 0,05 mm dickes Glasseidenband verwendet, das aus den dünnsten serienmässig hergestellten Mikrofäden gesponnen wird, da so dünne Glasfasern die grösste spezifische Reissfestigkeit aufweisen. Dieses Band wurde in einem Giessharz (zum Beispiel Araldit) getränkt und dann möglichst straff in einzelnen Schichten zwischen die Wicklungslagen und um die Hochfeldspule gewickelt.

Als Beispiel für eine solche Glasfaserverstärkung möge der Aufbau von Spule Nr. 1 (Tabelle 4) dienen. Diese Spule, die speziell für die Erzeugung höchster Magnetfelder während einer Impulsdauer von rund einer Millisekunde dimensioniert ist, wurde aus lackisoliertem Rechteckprofildraht (1,30 · 0,25 mm)

³⁾ Für diesen Vorschlag bin ich Herrn Prof. Dr. P. GRASSMANN zu Dank verpflichtet.

auf einen Plexiglaskörper gewickelt. Nach sechs Lagen wurde eine ungefähr 1,5 mm dicke Glasfaserschicht eingeschaltet. Dabei musste speziell darauf geachtet werden, dass sich die Glasfasern vollständig mit Giessharz durchsetzten (das unverleimte Glasfaserband kann mit Leichtigkeit mit der Hand zerrissen werden). Nach 10 weiteren Lagen (total 231 Windungen) wurde noch eine etwa 5 mm dicke Glasfaserschicht um die ganze Spule gelegt. Nach einer Vorkühlung mit flüssiger Luft konnte in dieser Spule ein maximales Magnetfeld von 290 000 A/cm (360 000 Oe) erzeugt werden, während sie bei 312 000 A/cm (390 000 Oe) explodierte. Es konnte allerdings nicht eindeutig festgestellt werden, ob die Zerstörung infolge der Biot-Savart-Kräfte oder infolge der Erhitzung erfolgte. Der äussere Glasfasermantel ist jedenfalls dabei unversehrt geblieben.

Durch den Übergang zu kürzeren Impulszeiten könnten wahrscheinlich in solchen mit Glasfasern verstärkten Spulen noch beträchtlich höhere Magnetfelder erzeugt werden, denn einerseits kann dadurch die Temperaturerhöhung reduziert werden und andererseits spielt besonders bei sehr kurzen Impulsdauern (zum Beispiel 10 μ s) auch die Trägheit des Spulenmaterials eine entscheidende Rolle, indem sich die Hochfeldspule während einer so kurzen Zeit gar nicht genügend deformieren kann, um zu zerreißen (siehe zum Beispiel [7]).

5. Die Hochfeldapparatur

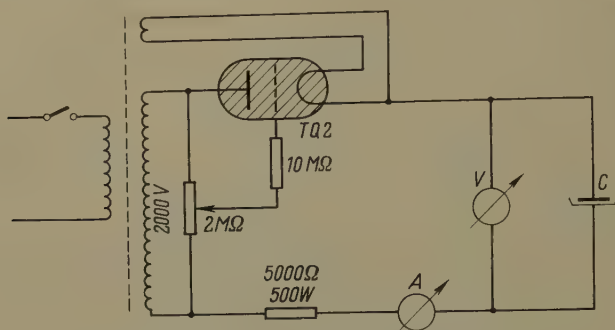
a) Kondensatorenbatterie

Unsere Kondensatorenbatterie besteht zurzeit aus 80 Elektrolytkondensatoren von je 550 μ F Kapazität und 500 V Nennspannung (total 5500 J Fassungsvermögen). Es wurden vor allem aus finanziellen Gründen Elektrolytkondensatoren verwendet, da sich in diesen am meisten «Joule pro Franken» aufspeichern lassen. Diese Kondensatoren können an einem Schaltbrett wahlweise in Serie oder parallel geschaltet werden. Da für unsere Messungen nur Impulsdauern von einigen Millisekunden und mehr in Frage kommen, sind wir nicht auf eine speziell induktionsarme Gestaltung der Zuleitungen zu den verschiedenen Kondensatoren und des Entladungskreises angewiesen (die Selbstinduktion unserer Hochfeldspulen ist von der Grössenordnung 100 μ Hy bis 100 mHy).

b) Das Aufladegerät

Ein Aufladegerät, das in der Lage ist, Stromstärken von 100 mA bis 500 mA zu liefern, wird im allgemeinen für unsere Zwecke vollständig genügen, da in diesem Falle die Aufladezeiten bereits kürzer als die entsprechenden Abkühlungszeiten der Hochfeldspule werden. Unser Aufladegerät wurde so entworfen, dass die Aufladespannung vorgewählt werden kann, um eine beliebige Einstellung der Höhe des Feldmaximums zu ermöglichen. Wie man aus der

Schaltung von Figur 7 ersieht, wird hier der Zündzeitpunkt des Thyratrons mit Hilfe der Steuerspannung am Gitter beeinflusst. Die Aufladespannung kann so zwischen Null und der Amplitude der sekundären Wechselspannung des Transformators kontinuierlich eingestellt werden.



Figur 7

Prinzipielles Schaltschema der Aufladeapparatur.

Wir sind in der Lage, mit diesem Aufladegerät unsere Kondensatorenbatterie bis auf 2800 V aufzuladen, wobei Stromstärken bis zu 500 mA daraus entnommen werden können.

c) Der Entladeschalter

Für unsere Zwecke kommen nur Schalter in Frage, die einerseits in der Lage sind, Ströme von der Grössenordnung 1000 bis 10000 A zu schalten, und bei denen andererseits der Einschaltvorgang schon nach wenigen Mikrosekunden abgeschlossen ist.

Wenn vor allem auf die zweite Bedingung Gewicht gelegt werden muss, so wird sich im allgemeinen die Verwendung eines elektronischen Schalters (Thyatron oder Ignitron) empfehlen.

Thyratrons und Ignitrons haben jedoch den Nachteil, dass sie sowohl die maximale Stromstärke als auch die Impulsdauer beschränken. Doch eignen sie sich besonders gut im Zusammenhang mit einer Elektrolytkondensatorenbatterie, da durch die Gleichrichterwirkung dieser Schalter eine schädliche, negative Aufladung der Elektrolytkondensatoren verhindert oder zumindest stark reduziert werden kann.

Eine weitere Möglichkeit, das Schalterproblem zu lösen, besteht in der Verwendung von Funkenschaltern. Solche Schalter können leicht selber hergestellt werden. Eine ausführliche Beschreibung zweier solcher Schalter findet man in einer Arbeit von CULLINGTON, CHACE and MORGAN [11].

Für unsere Apparatur haben wir ein Ignitron (Pl 5555) als Entladeschalter benutzt und damit sehr gute Erfahrungen gemacht. Dieses Ignitron soll nach den Angaben der Lieferfirma während 0,15 s Kurzschlußströme bis zu 10000 A aushalten. Es arbeitet in einem Spannungsbereich zwischen 200 und 2000 V.

d) Die Hochfeldspule

Die Richtlinien zur energetisch günstigsten Dimensionierung einer Hochfeldspule sind bereits am Schluss des 2. Kapitels angegeben worden.

Die Daten von drei Spulentypen, die hier besonders häufig verwendet werden, sind in Tabelle 4 zusammengestellt. Die Spule Nr. 1 ist für die Erzeugung von möglichst hohen Magnetfeldern vorgesehen, wobei allerdings eine für

Tabelle 4
Charakteristische Spulentypen

Nr.	r_i	r_a	$2l$	n	Draht H/I		H_{max} bei	L	τ_{max} bei
	mm	mm	mm	Win- dungen	mm	Oe/A	2000 V 2000 μF Oe	mHy	2000 μF ms
1	2,55	9,0	20,6	231	1,30 $\times 0,25$	122	400 000	0,18	0,7
2	6,6	25,4	75,5	7500	0,4	1155	100 000	420	30
3	2	8,5	76,8	1085	1,30 $\times 0,25$	176	230 000	10,8	2
Die Spule Nr. 1 wurde mit zwei Glasfaserschichten verstärkt (siehe Seite 27).									

unsere Verhältnisse sehr kurze Impulsdauer und ein nur in einem sehr kleinen Volumen einigermaßen homogenes Magnetfeld in Kauf genommen werden. Mit der Spule Nr. 2 wurde das Hochfeld im Gegensatz dazu während einer relativ langen Impulsdauer und in einem grossen Volumen erzeugt. Diese Spule wurde so dimensioniert, dass sie über ein spezielles Glasdewargefäß von 10 mm Aussendurchmesser geschoben werden kann. In diesem Dewargefäß kann eine Messung zum Beispiel in flüssigem Helium (4,2° K) oder bei anderen Temperaturen vorgenommen werden, während sich die Hochfeldspule in flüssiger Luft befindet. Die Spule Nr. 3 endlich ist für Messungen vorgesehen, bei denen speziell Gewicht auf die Homogenität des Magnetfeldes längs der Achse gelegt werden muss (Widerstandsänderung im longitudinalen Magnetfeld).

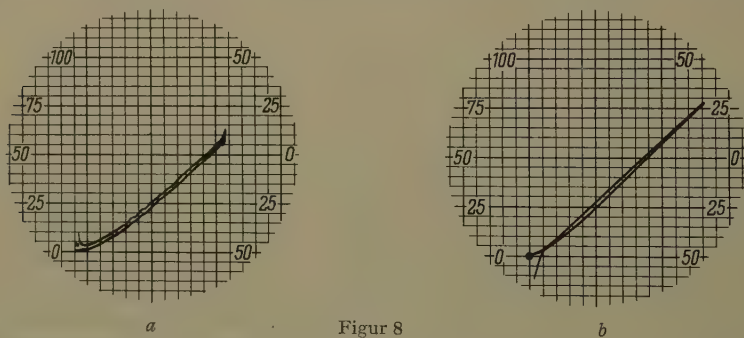
e) Die Messung des Magnetfeldes

Es hat sich gezeigt, dass für unsere Messungen das Magnetfeld mit genügender Genauigkeit der Stromstärke in der Hochfeldspule proportional gesetzt

werden darf, da Abweichungen von dieser Annahme, die aus den Deformationen der Hochfeldspule während der Entladung resultieren, grössenordnungsmässig kleiner sind als die Fehler, die sich zum Beispiel aus der Nichtlinearität und der Strahldicke des Kathodenstrahloszillographen ergeben. Um dies nachzuweisen, wurde für die verschiedenen Spulentypen jeweils die integrierte Spannung einer kleinen Pick-up-Spule gegen die Spannung an einem kleinen, induktionsfreien Messwiderstand im Entladungskreis (Stromstärke), aufgetragen. Die Steilheit der Geraden, die so entsteht, liefert zugleich einen zuverlässigen Wert für den Quotienten H/I , denn die Berechnung dieses Quotienten aus der Geometrie unserer kleinen Hochfeldspulen wird im allgemeinen zu ungenau.

6. Die Messung der magnetischen Widerstandsänderung von Metallen

Unsere Messmethode arbeitet nach folgendem Prinzip: Durch die Metallprobe, die wegen der Erschütterung der Hochfeldspule möglichst solid in dieser montiert werden muss, wird ein Gleichstrom geleitet. Der Spannungsabfall, der dabei an der Probe entsteht, wird auf den Vertikalverstärker eines Kathodenstrahloszillographen gegeben, während zugleich die Spannung am Messwiderstand des Entladungskreises an den Horizontalverstärker gelegt wird. Während einer Entladung wird so der Verlauf der magnetischen Widerstandsänderung direkt auf den Schirm des Kathodenstrahloszillographen gezeichnet (Figur 8).



Figur 8

Die Messung der magnetischen Widerstandsänderung von Cu ($\varrho_{4,2}/\varrho_{300} = 0,88\%$):

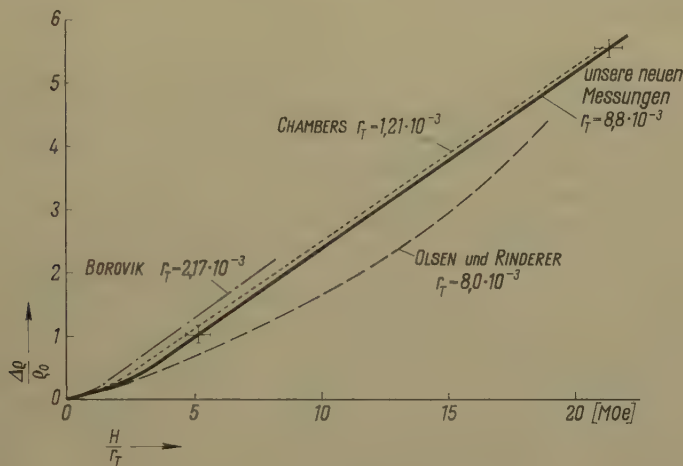
- a* Bei 77° K ($H_{\text{max}} = 260\,000 \text{ A/cm} = 325\,000 \text{ Oe}$, $\Delta\varrho/\varrho_{0\text{max}} = 0,51$). Die hochfrequenten Störungen werden durch die Erschütterung der Hochfeldspule verursacht.
- b* Bei $4,2^\circ \text{ K}$ ($H_{\text{max}} = 160\,000 \text{ A/cm}$, $\Delta\varrho/\varrho_{0\text{max}} = 5,82$). Die Hysteresis ist auf Wirbelstromaufheizung zurückzuführen.

Die durch das pulsierende Hochfeld im Messkreis induzierte Spannung äussert sich durch eine Hysteresis und wird hier mit einer Pick-up-Spule über ein Potentiometer auskompensiert.

Mit dieser Methode sind hier zahlreiche Messungen der magnetischen Widerstandsänderung von polykristallinen Metallen und Legierungen ausgeführt

worden [12]. Speziell wurde die longitudinale, magnetische Widerstandsänderung von Ag, Au, Li, Ni, Pb, Pt, Sn und Zn bei 4,2° K untersucht [13].

CHAMBERS [14] weist darauf hin, dass die ersten Messungen der magnetischen Widerstandsänderung von Elektrolytkupfer, die hier in pulsierenden Hochfeldern bei 4,2° K ausgeführt wurden [15], nicht, wie es nach der Kohlerschen Regel zu erwarten wäre, mit seinen (und BOROVIKS [16]), in Dauermagnetfeldern an hochreinen Cu-Proben vorgenommenen Messungen übereinstimmen.



Figur 9

Transversale magnetische Widerstandsänderung $\Delta\rho/\rho_0$ von Cu bei 4,2° K als Funktion von H/r_T , wobei $r_T = \rho_{4,2}/\rho_{300}$. Die eingezeichneten Kreuze zeigen die Messfehler unserer Messungen an.

Unsere Messungen (und auch eine Messung der magnetischen Widerstandsänderung von Al [17]) mussten aus energetischen Gründen mit sehr kleinen Hochfeldspulen und entsprechend kleinen Proben ausgeführt werden. Es zeigte sich denn auch, dass eine neue Messung an Elektrolytkupfer Resultate lieferte, die im Kohler-Diagramm gut mit den Messungen von CHAMBERS übereinstimmen⁴). Die verschiedenen Resultate sind in Figur 9 zusammengestellt. Es scheint, dass nach den verschiedenen Verbesserungen, die im Laufe der letzten Jahre an unserer Messmethode vorgenommen wurden (grössere Hochfeldspulen, längere Impulszeiten, verbesserte Kompensationsmethode), nun zuverlässige Resultate erwartet werden dürfen. Unsere Messung wurde an einer Cu-Probe von 0,88% Restwiderstandsverhältnis ($\rho_{4,2}/\rho_{300}$) bei 4,2° K in Magnetfeldern bis zu 160000 A/cm (200000 Oe) vorgenommen.

⁴) Diese Resultate stimmen auch gut mit Messungen von DE LAUNAY und WEBBER überein, in die uns freundlicherweise vor der Veröffentlichung Einblick gewährt wurde.

Herrn Prof. Dr. P. GRASSMANN, Vorstand des Institutes für kalorische Apparate und Kältetechnik, der mir auch mit einigen sehr nützlichen Ratsschlägen half, möchte ich an dieser Stelle meinen herzlichen Dank ausdrücken. Ausserdem bin ich den Herren Dr. J. L. OLSEN und B. LÜTHI für ihre Mitarbeit beim Entwickeln dieser Apparaturen und für ihre Hilfe beim Redigieren dieser Veröffentlichung zu Dank verpflichtet. Diese Arbeit wurde aus dem «Aluminiumfonds Neuhausen» und aus dem «Arbeitsbeschaffungsfonds des Bundes» finanziert. Beiden Institutionen sei auch an dieser Stelle für die zur Verfügung gestellten Mittel gedankt.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] P. L. KAPITZA, Proc. Roy. Soc. [A] 105, 691 (1924).
- [2] P. L. KAPITZA, Proc. Roy. Soc. [A] 115, 658 (1927).
- [3] T. F. WALL, J. Inst. elect. Engrs. 64, 745 (1926).
- [4] K. S. W. CHAMPION, Proc. phys. Soc. [B] 63, 795 (1950).
- [5] J. L. OLSEN, Helv. Phys. Acta 26, 798 (1953).
- [6] S. FONER und H. H. KOLM, Rev. Sci. Instr. 28, 799 (1957).
- [7] H. P. FURTH und R. W. WANIEK, Rev. Sci. Instr. 27, 195 (1956).
- [8] I. S. JACOBS und P. E. LAWRENCE, Rev. Sci. Instr. 29, 713 (1958).
- [9] G. RAOULT, Ann. Phys. 4, 369 (1949).
- [10] D. SHOENBERG, Nature 170, 569 (1952).
- [11] E. H. CULLINGTON, W. G. CHACE und R. L. MORGAN, Instr. for Geophys. Res. Nr. 5 (1955).
- [12] B. LÜTHI, wird demnächst veröffentlicht (Helv. phys. Acta).
- [13] B. LÜTHI, Phys. Rev. Letters 2, 503 (1959).
- [14] R. G. CHAMBERS, Proc. Roy. Soc. [A] 238, 344 (1956).
- [15] J. L. OLSEN und L. RINDERER, Nature 173, 682 (1954).
- [16] E. S. BOROVIK, J. exp. Theor. Phys. USSR 27, 355 (1964).
- [17] B. LÜTHI und J. L. OLSEN, Il Nuovo Cimento [X], 3, 840 (1956).
- [18] H. P. FURTH, M. A. LEVINE und R. W. WANIEK, Rev. Sci. Instr. 28, 949 (1957).

Summary

The design of an apparatus for producing very high pulsed magnetic fields using condenser discharges is discussed. Efficiency, heating and strength are investigated. The calculations are compared with experimental data on coil types producing 320 000 A/cm (400 000 Oe) for 1 ms in a volume of 0,5 cm³ and 80 000 A/cm (100 000 Oe) for 100 ms in 10 cm³. Results of magnetoresistance measurements on copper to 260 000 A/cm (325 000 Oe) at liquid nitrogen temperature and to 160 000 A/cm (200 000 Oe) at liquid helium temperature are given. In a Kohler diagram these results are in agreement with work by CHAMBERS on purer specimens in lower fields.

(Eingegangen: 27. Juni 1959.)

The Plastic Indentation of a Semi-Infinite Solid by a Perfectly Rough Circular Punch

By GEORGE EASON¹⁾ and RICHARD T. SHIELD²⁾, Newcastle upon Tyne and
Providence, R. I.

1. Introduction

Although many problems of plastic flow under conditions of plane strain have been solved, there are, as yet, few solutions to axially symmetric problems. Previous work includes solutions to the problems of the partially plastic thick-walled tube (see for example [6]³⁾, and the problem of converging plastic flow in a conical channel [9,7]. These problems have been solved for both the Tresca and the von Mises yield conditions.

SHIELD [8] has considered the general problem of the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry for the Tresca yield criterion and associated plastic stress-strain relations. The following work is essentially a continuation of that paper. In [8], as here, the material was assumed to be isotropic, non-hardening, rigid-plastic and a discussion was given of the types of plastic flow which could occur. The discussion and the applications in [8] showed that the plastic regimes which satisfy the hypothesis proposed by HAAR and VON KÁRMÁN [4] are of importance in the solution of axially symmetric problems. This hypothesis states that the circumferential stress is equal to one of the principal stresses in the meridional planes during plastic deformation. The problems considered under this hypothesis were the incipient necking of a circular cylinder stressed to yielding in tension, and the indentation of a semi-infinite solid by a smooth, circular flat-ended rigid punch.

In this paper, section 2 contains a résumé of the equations of [8] relevant to the present work. In section 3 a possible velocity field is obtained for the compression of a circular cylinder. In sections 4 and 5 the indentation of a semi-infinite solid by a perfectly rough, circular flat-ended rigid punch is considered. A complete solution to this problem is obtained by numerical methods, the numerical work being performed on the high speed digital computers AMOS and FERDINAND. The value of the average pressure over the surface of the punch is found to be $6.05 k$, where k is the maximum shearing stress permissible in the body, in contrast to the value of $5.69 k$ obtained in [8]

¹⁾ King's College, Newcastle upon Tyne.

²⁾ Brown University, Providence, R. I., USA.

³⁾ Numbers in brackets refer to References, page 42.

for the smooth punch. The maximum numerical value of the ratio between the shearing stress τ_{rz} on the surface of the punch to the normal stress σ_z is found to be 0.139. It follows that the condition of perfect roughness between the punch and the material can be replaced by the condition that the coefficient of friction between the punch and the material must exceed 0.139 for the solution to apply.

2. The Basic Equations

The basic equations of axially symmetric plastic flow were discussed in detail in [8] for a rigid-plastic nonhardening material obeying TRESCA's maximum shear stress yield criterion. As in the application of the theory in [8], the hypothesis of HAAR and VON KÁRMÁN [4] is assumed for plastic states, i. e. the circumferential stress is taken to be equal to one of the other two principal stresses in the meridional planes. More specifically, the circumferential stress is taken equal to the algebraically greater of the other two principal stresses, as in the regions of deformation to be considered the radial velocity is positive and produces a tensile circumferential strain rate (plastic regime F of [8]). The Tresca yield criterion then requires the principal stresses in the meridional planes to differ by $2k$, where k is the maximum shearing stress permissible in the material. A short summary is now given of the relevant equations.

In a cylindrical polar co-ordinate system (r, θ, z) , the only non-vanishing stress components in a stress distribution which is axially symmetric about the z -axis are $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}$. The circumferential stress, σ_θ , is a principal stress, the other principal stresses σ_1, σ_2 ($\sigma_1 \geq \sigma_2$) in the meridional planes being given by

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_z) + \left\{ \frac{1}{4} (\sigma_r - \sigma_z)^2 + \tau_{rz}^2 \right\}^{1/2}, \\ \sigma_2 &= \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_z) - \left\{ \frac{1}{4} (\sigma_r - \sigma_z)^2 + \tau_{rz}^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

For the plastic regime under discussion we have

$$\sigma_\theta = \sigma_1 = \sigma_2 + 2k. \quad (2)$$

The equations of equilibrium take the forms

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0, \quad (3)$$

in the absence of body forces.

Equations (2), (3) provide four equations for the determination of the four stress components so that in a sense the problem is 'statically determinate'. The system of equations is hyperbolic with orthogonal characteristics in the

(r, z) -plane which coincide with the slip-lines, the lines of maximum shearing stress. The slip-lines will subsequently be referred to as α - and β -lines.

Surface elements perpendicular to the α - and β -lines are acted upon by a shearing stress k and a normal stress which will be denoted by $-\phi$. The stress components are given by

$$\sigma_r = -\phi - k \sin 2\varphi, \quad \sigma_z = -\phi + k \sin 2\varphi, \quad \tau_{rz} = k \cos 2\varphi, \quad \sigma_\theta = -\phi + k, \quad (4)$$

where φ is the inclination of the α -line to the r -axis. The equilibrium equations (3) determine ϕ and φ , and referred to the slip-lines the equations take the forms

$$\left. \begin{aligned} d\phi + 2k d\varphi + k(\sin\varphi + \cos\varphi) \frac{ds_\alpha}{r} &= 0 \text{ on an } \alpha\text{-line}, \\ d\phi - 2k d\varphi - k(\sin\varphi + \cos\varphi) \frac{ds_\beta}{r} &= 0 \text{ on a } \beta\text{-line}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

where ds_α, ds_β are elements of length along the α - and β -lines.

On the axis of symmetry the shearing stress is zero and the radial and circumferential stresses are of equal magnitude, so that on the axis

$$\varphi = \frac{3}{4} \pi. \quad (6)$$

Using this result, an expansion of ϕ and φ for small r shows that in the neighbourhood of the axis of symmetry

$$\phi + 4k\varphi = \text{const on an } \alpha\text{-line}, \quad \phi - 4k\varphi = \text{const on a } \beta\text{-line}, \quad (7)$$

to first order.

The velocity field is assumed to have radial symmetry, although this does not necessarily follow from the symmetry of the stress field. If u, w are the velocities in the r, z directions respectively, the non-zero strain rates are given by

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, \quad (8)$$

with ϵ_θ a principal strain rate. The other principal strain rates ϵ_1, ϵ_2 associated with the σ_1, σ_2 directions are

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{2} (\epsilon_r + \epsilon_z) + \frac{1}{2} \{ (\epsilon_r - \epsilon_z)^2 + \gamma_{rz}^2 \}^{1/2}, \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{2} (\epsilon_r + \epsilon_z) - \frac{1}{2} \{ (\epsilon_r - \epsilon_z)^2 + \gamma_{rz}^2 \}^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

The incompressibility of the material requires, with (8) for the strain rates,

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (10)$$

This equation and the isotropy condition, which can be written

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}}{\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial z}} = -\cot 2\varphi, \quad (11)$$

serve to determine the velocity components u, w when the slip-line field is known. For numerical work it is convenient to introduce the components of velocity U, W along the α - and β -lines respectively, given by

$$U = u \cos \varphi + w \sin \varphi, \quad W = -u \sin \varphi + w \cos \varphi. \quad (12)$$

Equations (10) and (11) on u, w require U, W to satisfy the equations

$$\left. \begin{aligned} dU - W d\varphi + \frac{u ds_\alpha}{2r} &= 0 \text{ on an } \alpha\text{-line}, \\ dW + U d\varphi + \frac{u ds_\beta}{2r} &= 0 \text{ on a } \beta\text{-line}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

For the velocity field to be associated with the stress field the velocities must be such that

$$\Gamma \geq \frac{u}{r} \geq 0, \quad (14)$$

where

$$\Gamma = \frac{\partial U}{\partial s_\beta} + \frac{\partial W}{\partial s_\alpha} + U \frac{\partial \varphi}{\partial s_\alpha} - W \frac{\partial \varphi}{\partial s_\beta}. \quad (15)$$

The theory outlined in this section will now be applied to obtain a deformation mode for the compression of a circular cylinder and to obtain the solution to the problem of indentation by a rough circular punch.

3. Compression of a Circular Cylinder

In section 3 of [8] several examples were given of possible incipient deformation modes for a circular cylinder of rigid-plastic material stressed to yielding in uniaxial compression. The stress component σ_z then has the value $-2k$, all other stress components being zero. In this case the characteristics are straight lines inclined at an angle of $\pi/4$ to the co-ordinate axes. The cylinder occupies the region $r \leq 1, z \geq 0$, and velocity solutions were obtained which are such that the normal velocity over the end of the cylinder, $z = 0$, is constant. Here we obtain a velocity field which satisfies the further restriction that the radial velocity u be zero over the end $z = 0$ of the cylinder.

For simplicity the normal velocity is taken to be unity over the end OA of the cylinder (Figure 1). The velocity field involves a rigid body motion of region OAC in the axial direction and flow in the region ABC . As in [8] it can be shown

that $u = w = 0$ on BC because of the rigidity of the material above BC . The incompressibility condition and the condition of zero shearing strain rate together with the continuity condition across AC then require u and w to be given by

$$u = \frac{1}{\pi} (1 - \tan^2 \psi)^{1/2}, \quad w = \frac{1}{\pi} \cos^{-1}(\tan \psi), \quad (16)$$

in region ABC ,

$$-\frac{1}{4}\pi \leq \psi \leq \frac{1}{4}\pi,$$

where the value of the inverse cosine lies between 0 and π . The angle ψ is defined as in Figure 1. The velocity field defined by (16) was given previously in a different form in [8], apart from a multiplicative constant (equations (3.3) of [8]).

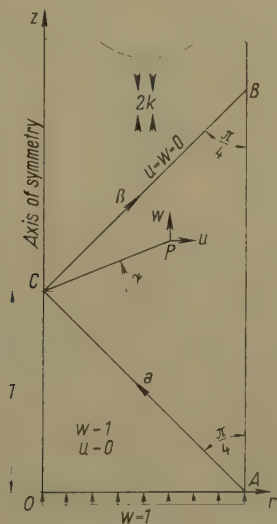


Figure 1

Cylinder stressed to yielding in compression.

4. Circular Punch: Stress Field

In [8] a complete solution to the problem of the indentation of a semi-infinite solid of rigid-plastic material by a smooth, circular flat-ended rigid punch was found. The closely allied problem of the indentation of a semi-infinite solid of rigid plastic material by a perfectly rough, circular flat-ended rigid punch is investigated here. These problems are both of importance in

testing the hardness of metals (see, for example [10]). The body is assumed to occupy the region $z \geq 0$, with the origin of co-ordinates at the centre O of the punch (Figure 2). The punch indents the portion OA of the surface of the solid, $z = 0$. The plastic stress field near the punch is assumed to satisfy (2). This assumption is shown to be correct by the fact that the solution to the problem is obtained.

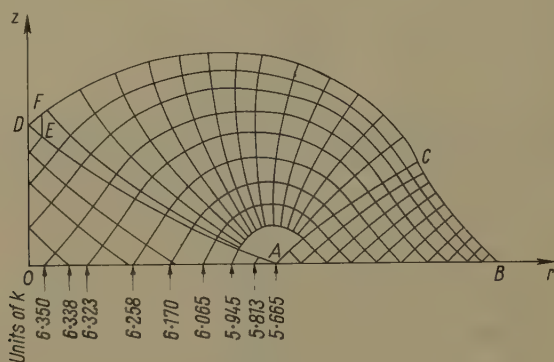


Figure 2

Slip-line field due to indentation by a rough circular punch.

Referring to Figure 2, the stress field in region ABC is determined by the stress-free surface AB . The solution for this type of region has been tabulated in [8], and the results of Table I of that paper may be applied. The line AC is an α -line and BC is a β -line. The field in region ACD is determined by the α -line AC and the singular point A , the fan being terminated by the α -line AD which meets the axis of symmetry at an angle of $\pi/4$, at D . The field in region ADO is determined by the α -line AD and the condition that the β -lines of the region meet the axis of symmetry at angles of $\pi/4$. The slip lines must meet the axis of symmetry at angles of $\pi/4$ in order that the shearing stress be zero on the axis.

The stress field in region $ACDO$ was obtained by numerical integration of (5). These differential equations were replaced by finite difference equations and the same numerical procedure used as in [8]. Equations (7) were used to determine the position of the point D . Figure 2 shows the main details of the characteristic network obtained as a result of the numerical integration. The calculated pressure distribution over the punch is shown graphically in Figure 3. The average pressure over the punch is found to be $6.05 k$. For comparison, the pressure distribution found in [8] for a smooth punch is also shown in Figure 3, the average pressure over the punch in this case is found to be $5.69 k$. With the distance OA as the unit of length, the distance OB , in Figure 2, was found to

be 1.88, and the distance OD was found to be 0.57. The angle of the fan was found to be 116° . A coefficient of friction may be defined along OA by writing

$$\mu = -\frac{\tau_{rz}}{\sigma_z} \quad (17)$$

The maximum value of μ along OA was found to occur at A and to have the value 0.139. Thus, the solution obtained here holds for a rough punch provided that the coefficient of friction between the material and the punch exceeds 0.139.

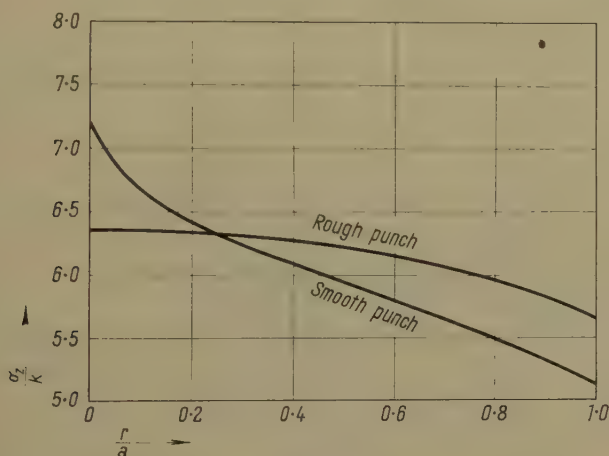


Figure 3
Pressure distribution over punch.

As in the case of the smooth punch the stress field has been extended into the rest of the body. The method of extension closely follows that used in [8] in which theorems developed by BISHOP [1] for the case of plane strain were applied.

The extension of the stress field is indicated in Figure 4, and was obtained by assuming the material to be fully plastic and satisfying (2). The β -line BCD , together with the condition that slip-lines meet the axis of symmetry at angles of $\pi/4$, determines the field to the left of the α -line through B . The field to the right of the α -line through B is determined by the α -line through B and terminating the field by a stress-free surface, BJK . The α -lines begin to intersect one another at G , a point on the α -line through B , and a shock is introduced, shown by the heavy line in Figure 4. Another shock is introduced at point M , where the α -lines intersect on the α -line through C . The two shocks intersect at point H , and the stress field was continued by the introduction of a shock HL , and a fan HJ of small angle (shown by the broken line in Figure 4). The stress-free

rigid body in the axial direction with the velocity of the punch. The velocity field in region $ABCD$ must satisfy the conditions that the normal velocity across AD is continuous and that the normal velocity across BCD is zero, as the region above this line is assumed to be rigid. As AD is an α -line, the first of these conditions implies W continuous across AD , so that

$$W = \cos\varphi \text{ on } AD. \quad (18)$$

Along AD the first of equations (13) holds, and with (18) this takes the form

$$dU - \cos\varphi d\varphi + (U - \sin\varphi) \frac{dr}{2r} = 0. \quad (19)$$

The general solution of this equation is

$$U - \sin\varphi = \frac{A}{r^{1/2}}, \quad (20)$$

where A is a constant. To avoid an infinity in the value of U at the point D , A must be taken to be zero, so that

$$U = \sin\varphi \text{ on } AD. \quad (21)$$

Thus the velocity field is seen to be continuous across AD . A similar argument to the above shows that

$$U = W = 0 \text{ along } BCD, \quad (22)$$

so that the velocity is also continuous across BCD .

The point D is a singular point of the velocity field. Near this point the slip-lines are inclined at angles of $\pi/4$ to the co-ordinate axes, and the velocity field given by (16) may be taken to hold. This velocity field was assumed to apply in the region DEF of Figure 2. Since the velocity is now known along the lines $AFECB$, the velocities within this region may be determined by integration of (13). The point A is also a singular point of the velocity field.

The velocity field in region $AFECB$ was obtained by numerical integration of (13). The same numerical procedure was adopted as in [8], the differential equations being replaced by finite difference equations. The incompressibility of the material provides a check on the accuracy of the calculation. It was found that the flow across AB was within 1% of the flow across OA . The deformation of an initially square grid which would result if this incipient velocity field were maintained for a short interval of time is shown in Figure 5.

The velocity field must also satisfy the inequalities (14) if it is to be associated with the plastic stress field. The inequalities were checked numerically at various points of the field, a sufficient number of points being taken to ensure that the inequalities held everywhere.

The velocity field is a kinematically admissible deformation mode and application of the limit analysis theorems shows that the value $6.05 k$ is an upper bound for the indentation pressure. The value $6.05 k$ is thus the actual indentation pressure, as it is also a lower bound. A theorem due to HILL [5] states that where deformation is actually occurring the stress field is unique. Also a theorem to BISHOP, GREEN and HILL [2] states that if any region of a complete solution is necessarily rigid, then it must be rigid in all complete solutions. Application of these theorems shows that the stress field of Figure 2 in region $ABCD$ is the actual plastic stress field, and plastic deformation can only occur in region $ABCD$ of Figure 5.

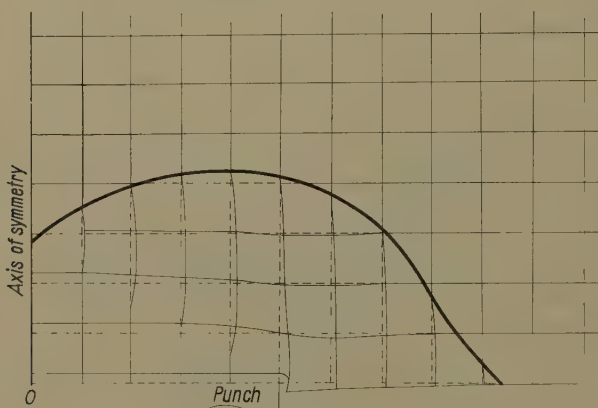


Figure 5

Resulting deformation of a square grid if the incipient velocity field were maintained for a short period of time.

REFERENCES

- [1] BISHOP, J. F. W., *J. Mech. Phys. Solids* 2, 43 (1953).
- [2] BISHOP, J. F. W., GREEN, A. P., and HILL, R., *J. Mech. Phys. Solids* 4, 256 (1956).
- [3] DRUCKER, D. C., GREENBERG, H. J., and PRAGER, W., *Quart. appl. Math.* 9, 381 (1952).
- [4] HAAR, A., and VON KÁRMÁN, TH., *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl.* 1909, 204.
- [5] HILL, R., *Phil. Mag.* 42, 868 (1951).
- [6] KOITER, W. T., *Anniversary Volume in Applied Mechanics Dedicated to C. B. Biezeno* (H. Stam, Haarlem, Holland 1953), p. 233.
- [7] SHIELD, R. T., *J. Mech. Phys. Solids* 3, 246 (1955).
- [8] SHIELD, R. T., *Proc. Roy. Soc. [A]* 233, 267 (1955).
- [9] SOKOLOVSKY, V. V., *Theory of Plasticity*, 2nd ed. (Moscow State Printing House of Technical and Theoretical Literature 1950), p. 302.
- [10] TABOR, D., *The Hardness of Metals* (Clarendon Press, Oxford 1951).

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden das plastische Spannungsfeld und ein zulässiges Geschwindigkeitsfeld für den eben begrenzten Halbraum gegeben, der unter dem Einfluss eines ideal rauhen, starren Stempels mit kreisförmigem Querschnitt steht. Das Material ist als starr-plastisch vorausgesetzt, ohne Verfestigung, und der Fließbedingung von TRESCA genügend. Es wird gezeigt, dass die Hypothese von HAAR und von KÁRMÁN auf dieses Problem anwendbar ist, wonach zwei von den drei Hauptspannungen gleich sind. Es wird auch eine gültige Fortsetzung des plastischen Spannungsfeldes ins starre Gebiet in der Nähe des Stempels erhalten.

(Received: May 11, 1959.)

Flow of an Electrically Conducting Fluid Past a Porous Flat Plate in the Presence of a Transverse Magnetic Field

By ANADI SHANKAR GUPTA, Kharagpur, India¹⁾

1. Introduction

In recent years, the subject of hydromagnetics has attracted the attention of many authors in view not only of its own interest but also of its enormous applications to problems of geophysical and astrophysical significance.

The general equations of unified velocity and magnetic fields for the flow of an incompressible, viscous and electrically conducting fluid subject to a magnetic field have been derived by BATCHELOR [1]²⁾.

In this paper, we have discussed the effect of a transverse magnetic field on the steady flow of an incompressible electrically conducting fluid past an infinite porous flat plate when the plate is subjected to either suction or injection. Exact solution has been obtained for the modified Navier-Stokes and Maxwell equations under the usual assumptions of magneto-hydrodynamics. The equation of heat transfer including viscous and Joule dissipation has also been integrated and the rate of heat transfer calculated. The corresponding problem in the absence of magnetic field has been solved by GRIFFITH and MEREDITH [2].

2. Basic Equations

The fundamental equations of hydromagnetics are:

(a) MAXWELL'S equations:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{4 \pi c^2 Q}{\varepsilon}, \quad (1)$$

¹⁾ Indian Institute of Technology.

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 50.

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{H} = 4 \pi \mathbf{j} + \frac{\varepsilon}{c^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (4)$$

$$\mathbf{B} = \mu_c \mathbf{H}. \quad (5)$$

(b) OHM's law:

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{q} \times \mathbf{B}) + Q \mathbf{q}. \quad (6)$$

(c) The equation of continuity for an incompressible fluid:

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = 0. \quad (7)$$

(d) The modified Navier-Stokes equation:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + (\mathbf{q} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{q} = - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \nabla^2 \mathbf{q} + \frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \frac{Q}{\rho} \mathbf{E}. \quad (8)$$

Here, \mathbf{E} is the electric field, \mathbf{B} the electromagnetic induction, \mathbf{H} the magnetic field, \mathbf{j} the current density, Q the excess charge density, ε the dielectric constant, μ_c the magnetic permeability, σ the electrical conductivity and c the velocity of light. All electromagnetic quantities are measured in electromagnetic units. The quantities ε and μ_c are assumed to be uniform throughout the field.

ELSASSER [3] has pointed out that the ratio of the displacement current to the conduction current in a large class of phenomena is so small that displacement currents can be neglected entirely. In our case it is zero simply by virtue of the fact that the motion is steady. Consistent with the above assumption, the convection current $Q \mathbf{q}$ in (6) and the electric force $Q \mathbf{E}/\rho$ due to excess charge in (8) are also ignored. In the following analysis the equations (4), (5) and (8) should be understood to have been simplified by the above assumptions.

Eliminating \mathbf{E} between (3) and (6) with the help of (2), (4) and (5), we have

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{curl}(\mathbf{q} \times \mathbf{H}) + \eta \nabla^2 \mathbf{H}, \quad (9)$$

where

$$\eta = \frac{1}{4 \pi \mu_c \sigma}, \quad (10)$$

which is interpreted as a magnetic diffusivity. Again elimination of \mathbf{j} between (4) and (8) gives

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + (\mathbf{q} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{q} = - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \nabla^2 \mathbf{q} + \frac{\mu_c}{4 \pi \rho} (\operatorname{curl} \mathbf{H} \times \mathbf{H}). \quad (11)$$

Equations (9) and (11) together with (2) (i. e. $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$) and (7) constitute the basic equations of hydromagnetics.

In the present problem, we take the coordinate origin O at any point on the infinite plate, which is assumed to be nonmagnetic and electrically non-conducting and use Cartesian co-ordinates x and y with the axis OX along the plate OY and perpendicular to it. The liquid flows past the porous plate along OX and a transverse magnetic field H_0 is applied to it.

For steady flow past an infinite plate, we can assume that all physical quantities are functions of y only. Let u and v denote the components of the vector \mathbf{q} in the directions of the co-ordinates X and Y .

The equation of continuity then becomes

$$\frac{dv}{dy} = 0, \quad (12)$$

which gives

$$v = v_0 = \text{const.} \quad (13)$$

The modified Navier-Stokes equation (11) then gives

$$\rho v_0 \frac{du}{dy} = \mu \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{\mu_e}{4\pi} H_y \frac{dH_x}{dy}, \quad (14)$$

$$0 = -\frac{dp}{dy} - \frac{\mu_e}{4\pi} H_x \frac{dH_x}{dy}. \quad (15)$$

Again the magnetic equation (9) gives

$$\frac{d}{dy} (u H_x - v_0 H_x) + \eta \frac{d^2 H_x}{dy^2} = 0, \quad (16)$$

$$\eta \frac{d^2 H_y}{dy^2} = 0. \quad (17)$$

The boundary conditions for the velocity field are

$$y = 0: u = 0, v = v_0; \quad y \rightarrow \infty: u = U, \quad (18)$$

where U is the velocity at far distance from the plate.

The boundary conditions for the magnetic field are that both the tangential component of the magnetic field and the normal component of the magnetic induction are continuous at the plate. Since, however, both the fluid and the plate are assumed to be nonmagnetic in the present problem, the continuity condition for the magnetic induction may be replaced by that for the magnetic field itself. The total magnetic field at the plate is the vector sum of the imposed and induced fields, the latter resulting from the induced current distribution in the fluid. This distribution is obtained from the solution and is therefore unknown. On the other hand, since the velocity tends to the constant

value U asymptotically at far distance from the plate, no interactions exist there. Hence the magnetic field tends to the imposed field H_0 as $y \rightarrow \infty$. The boundary conditions for the magnetic field may therefore be taken as

$$y = 0: H_y = H_0; \quad y \rightarrow \infty: H_y \rightarrow H_0, H_x \rightarrow 0. \quad (19)$$

These imply that the total flux of current in the direction OY is zero since

$$\mathbf{j} = \frac{1}{4\pi} \text{curl } \mathbf{H}.$$

3. Integration of the Equations

The solution of (17) subject to (19) is

$$H_y = \text{const} = H_0, \quad (20)$$

while (16) with $H_y = H_0$ yields on integration

$$u H_0 - v_0 H_x + \eta \frac{dH_x}{dy} = \text{const} = U H_0, \quad (21)$$

where the constant is determined from the fact that $H_x \rightarrow 0$, $dH_x/dy \rightarrow 0$ and $u \rightarrow U$ as $y \rightarrow \infty$.

Again (14) with (20) gives on integration

$$\varrho v_0 u = \mu \frac{du}{dy} + \frac{\mu_e}{4\pi} H_0 H_x + \varrho v_0 U,$$

where the constant of integration is evaluated from the fact that $u \rightarrow U$, $du/dy \rightarrow 0$ and $H_x \rightarrow 0$ as $y \rightarrow \infty$. The above equation gives

$$H_x = \frac{4\pi}{\mu_e H_0} \left[\varrho v_0 (u - U) - \mu \frac{du}{dy} \right], \quad (22)$$

which gives the induced field when the velocity field is known. Substitution of H_x from (22) in (21) gives

$$\frac{d^2 u}{dy^2} - \frac{v_0}{\eta \mu} (\eta \varrho + \mu) \frac{du}{dy} - u \left(\frac{\mu_e H_0^2}{4\pi \eta \mu} - \frac{\varrho v_0^2}{\eta \mu} \right) = \frac{\mu_e H_0 U}{4\pi \eta \mu} \left(\frac{4\pi \varrho v_0^2}{\mu_e H_0} - H_0 \right). \quad (23)$$

If the pressure at infinity is p_∞ , it follows from (15) that

$$p + \frac{\mu_e}{8\pi} H_x^2 = p_\infty,$$

which shows the balance between the fluid and 'magnetic pressure' because H_y has been shown to be uniform throughout the whole field.

We shall now consider two cases.

Case I: $v_0 < 0$

This case corresponds to suction at the plate. Putting $v_0 = -v$ ($v > 0$), the solution of (23) is given by

$$u = U + A \exp \left\{ \frac{y}{2 \eta \mu} \left[-v (\eta \varrho + \mu) + \sqrt{v^2 (\eta \varrho + \mu)^2 + 4 \left(\frac{\mu_e H_0^2}{4 \pi} - \varrho v^2 \right) \eta \mu} \right] \right\} \\ + B \exp \left\{ \frac{y}{2 \eta \mu} \left[-v (\eta \varrho + \mu) - \sqrt{v^2 (\eta \varrho + \mu)^2 + 4 \left(\frac{\mu_e H_0^2}{4 \pi} - \varrho v^2 \right) \eta \mu} \right] \right\}. \quad (24)$$

Clearly the expression in (24) is real for

$$v^2 (\eta \varrho + \mu)^2 + 4 \left(\frac{\mu_e H_0^2}{4 \pi} - \varrho v^2 \right) \eta \mu$$

can be written as $v^2 (\eta \varrho - \mu)^2 + \mu_e H_0^2 / \pi$, which is positive. Again when $\mu_e H_0^2 / 4 \pi > \varrho v^2$ the expression

$$\sqrt{v^2 (\eta \varrho + \mu)^2 + 4 \left(\frac{\mu_e H_0^2}{4 \pi} - \varrho v^2 \right) \eta \mu}$$

becomes greater than $v (\eta \varrho + \mu)$. Hence in this case the solution (24) subject to (18) gives

$$\frac{u}{U} = 1 - \exp \left\{ -\frac{v y}{2 \nu} \left[1 + \frac{\nu}{\eta} + \sqrt{\left(1 - \frac{\nu}{\eta} \right)^2 + \frac{\mu_e H_0^2 v^2}{\pi v^2 \eta \mu}} \right] \right\}. \quad (25)$$

It is convenient to define some non-dimensional parameters such as

$$\text{local Reynolds number: } Re = \frac{v y}{\nu}.$$

$$\text{Magnetic pressure number: } S = \frac{\mu_e H_0^2}{4 \pi \varrho v^2}, \quad (26)$$

together with the non-dimensional number $R_0 = \nu / \eta$.

Hence (25) can be written as

$$\frac{u}{U} = 1 - \exp \left\{ -\frac{v y}{2 \nu} \left[1 + R_0 + \sqrt{(1 - R_0)^2 + 4 S R_0} \right] \right\}, \quad (27)$$

which reduces to the ordinary asymptotic suction profile $u/U = 1 - e^{-vy/\nu}$ of GRIFFITH and MEREDITH when $S = 0$, i. e. $H_0 = 0$. The velocity distribution given by (27) is plotted for different values of S when $R_0 = 0.5$. It is seen from the graph that the effect of increase of S , i. e. the magnetic field is to increase the velocity. The point which seems to be of some physical interest is that the magnetic field should be strong enough to satisfy $\mu_e H_0^2 / 4 \pi > \varrho v^2$ (i. e. the magnetic pressure number S based on suction velocity should be > 1) in order that an asymptotic solution of the type (26) is possible.

If, however, $\mu_e H_0^2/4\pi < \varrho v^2$, i. e. $S < 1$, then both the powers of e in (24) become negative so that the constants A and B can not be determined from the boundary conditions (18). Thus in this case the problem becomes indeterminate. The problem, however, can be made determinate by suitably changing the boundary conditions viz., by considering two parallel plates.

The skinfriction τ_w at the plate is given by

$$\tau_w = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)_{y=0} = \frac{\mu U v}{2 \nu} \left[1 + R_0 + \sqrt{(1 - R_0)^2 + 4 S R_0} \right], \quad (28)$$

which increases as S increases.

Case II: $v_0 > 0$

This case corresponds to injection at the plate. Here again for $\mu_e H_0^2/4\pi > \varrho v_0^2$ the solution of (23) subject to (18) is

$$\frac{u}{U} = 1 - \exp \left\{ \frac{y}{2 \eta \mu} \left[v_0 (\eta \varrho + \mu) - \sqrt{v_0^2 (\eta \varrho - \mu)^2 + \frac{\mu_e H_0^2}{\pi} \eta \mu} \right] \right\}.$$

Introducing S and R_0 this can be written as

$$\frac{u}{U} = 1 - \exp \left\{ - \frac{v_0 y}{2 \nu} \left[\sqrt{(1 - R_0)^2 + 4 S R_0} - (1 + R_0) \right] \right\} \quad (29)$$

for $S > 1$. This shows that u increases with S .

The solution, however, remains indeterminate for $S < 1$ as in the previous case.

Using (29), the induced field component H_x can now be calculated from (22) as

$$H_x = \frac{-4 \pi \varrho v_0 U}{\mu_e H_0} \exp \left\{ - \frac{v_0 y}{2 \nu} \left[\sqrt{(1 - R_0)^2 + 4 S R_0} - (1 + R_0) \right] \right\} \times \left[1 + \frac{1}{2} \left[\sqrt{(1 - R_0)^2 + 4 S R_0} - (1 + R_0) \right] \right]. \quad (30)$$

The value at the plate is given by

$$(H_x)_0 = \frac{-4 \pi \varrho v_0 U}{\mu_e H_0} (1 + \beta); \quad \beta = \frac{1}{2} \left[\sqrt{(1 - R_0)^2 + 4 S R_0} - (1 + R_0) \right].$$

Using the definition of S the above equation can be written as

$$- \frac{(H_x)_0}{U} \sqrt{\frac{\mu_e}{4 \pi \varrho}} = \frac{1 + \frac{1}{2} \left[\sqrt{(1 - R_0)^2 + 4 S R_0} - (1 + R_0) \right]}{\sqrt{S}} = f(R_0, S), \quad (31)$$

say. Since

$$\frac{\partial}{\partial S} f(R_0, S) = - \frac{(1 - R_0) [\sqrt{(1 - R_0)^2 + 4 S R_0} + (1 - R_0)]}{2 S^{3/2} \sqrt{(1 - R_0)^2 + 4 S R_0}} < 0$$

for $R_0 < 1$, it follows that the induced field decreases with increase in the magnetic pressure number. Since $S = \mu_e H_0^2 / 4 \pi \varrho v_0^2$, decrease in v_0 for a given H_0 will result in increase of S_0 . Hence it follows that the induced field at the plate decreases with decrease of the injection velocity v_0 .

4. Integration of the Equation of Heat Transfer

The equation of heat transfer including viscous and Joule dissipation (for finite electrical conductivity σ) is

$$\varrho v_0 c_v \frac{dT}{dy} = \lambda \frac{d^2 T}{dy^2} + \frac{j^2}{\sigma} + \mu \left(\frac{du}{dy} \right)^2,$$

where c_v is the specific heat at constant volume and λ the thermal conductivity. Since

$$\mathbf{j} = \frac{1}{4\pi} \text{curl} \mathbf{H}$$

the above equation can be written as

$$\varrho v_0 c_v \frac{dT}{dy} = \lambda \frac{d^2 T}{dy^2} + \frac{1}{16\pi^2 \sigma} \left(\frac{dH_x}{dy} \right)^2 + \mu \left(\frac{du}{dy} \right)^2. \quad (32)$$

Substituting the values of u and H_x from (29) and (30) in (32) we get

$$\frac{d^2 T}{dy^2} - \frac{\varrho c_v v_0}{\lambda} \frac{dT}{dy} = - \frac{1}{\lambda} \left(- \frac{\gamma^2}{16\pi^2 \sigma} + \frac{\mu U^2 v_0^2}{v^2} \beta^2 \right) e^{-(2v_0 \beta / v) y}, \quad (33)$$

where

$$\beta = \frac{1}{2} \left[\sqrt{(1 - R_0)^2 + 4 S R_0} - (1 + R_0) \right], \quad \gamma = \frac{4\pi \varrho v_0^2 u \beta (1 + \beta)}{\mu_e H_0 v}. \quad (34)$$

The solution of (33) subject to $T = T_0$ at $y = 0$ and T finite at $y = \infty$ is given by

$$T - T_0 = \frac{\gamma^2 v^2 + 16\pi^2 \mu U^2 v_0^2 \beta^2 \sigma}{32\pi^2 \sigma v_0^2 (2\beta^2 \lambda + c_v \mu \beta)} (1 - e^{-(2v_0 \beta / v) y}). \quad (35)$$

For $\sigma = \infty$, the rate of heat transfer at the plate is given by

$$q_w = \lambda \left(\frac{dT}{dy} \right)_{y=0} = \varrho U^2 v_0 \frac{\beta^2}{2\beta + \mu c_v / \lambda}.$$

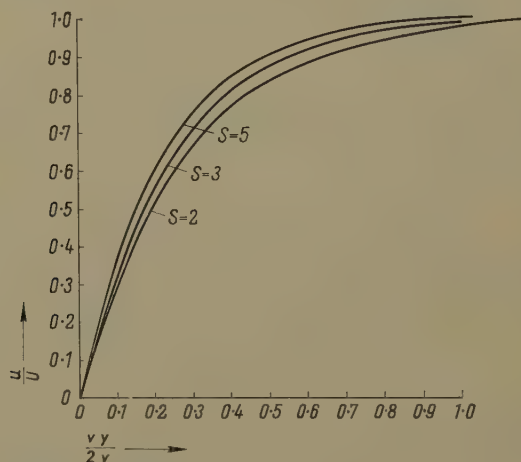
Since for an incompressible fluid, $c_p = c_v$ it follows from the above equation

that

$$\frac{q_w}{\rho U^2 v_0} = \frac{\beta^2}{2\beta + Pr} \quad (36)$$

(where Pr is the Prandtl number $\mu c_p/\lambda$), which increases as β increases.

I should like to thank Prof. B. R. SETH and Dr. G. BANDYOPADHYAY for their valuable comments.



Velocity distribution over the plate for different values of S when $R_0 = 0.5$.

REFERENCES

- [1] G. K. BATCHELOR, Proc. Roy. Soc. [A] 201, 405 (1950).
- [2] F. W. MEREDITH and A. A. GRIFFITH, *Modern Developments in Fluid Dynamics*, vol. 2 (Oxford University Press), pp. 534.
- [3] W. M. ELSASSER, Rev. Mod. Phys. 28, 135 (1956).

Zusammenfassung

Für die Strömung einer inkompressiblen, zähen, elektrisch leitenden Flüssigkeit über eine poröse Platte werden die Gleichungen von NAVIER und STOKES, von MAXWELL und die Wärmeübertragungsgleichung integriert. Dabei wird vorausgesetzt, dass Flüssigkeit aus der porösen Platte austritt oder durch sie abgesogen wird. Man findet, dass sowohl die Geschwindigkeiten als auch die Schubspannungen mit steigender magnetischer Druckzahl für Absaugen und Ausblasen anwachsen. Das induzierte Feld an der Plattenoberfläche wird kleiner, wenn die Ausblasegeschwindigkeit abnimmt. Für den Grenzfall unendlicher elektrischer Leitfähigkeit wächst der Wärmeübergang mit der magnetischen Druckzahl im Falle des Ausblasens.

(Received: May 20, 1959).

The Possibility of Normal Shock Waves on a Body with Convex Surfaces in Inviscid Transonic Flow

By GEORGE E. GADD, Teddington, Mddx, Great Britain¹⁾

Introduction

In inviscid transonic flow past a body with a convex surface, it can be shown by an argument essentially the same as that of ZIEREP [1]²⁾, that shock waves normal to the surface cannot occur if the Mach number upstream of the shock is close to 1, and the flow is free from singularities. It would, however, be surprising if such shocks could not, in fact, exist in inviscid flow, in view of EMMONS' relaxation solutions [2, 3] which require them. EMMONS suggested that the flow at the surface immediately downstream of the shock must have a singularity of the same kind as occurs for low-speed flow over a surface with a discontinuity in curvature. Such a flow has been considered by KOPPENFELS [4]. The present note shows, in confirmation of EMMONS' suggestion, that a simple modification of KOPPENFELS' solution appears to be applicable immediately downstream of a normal shock on a convex surface, making the occurrence of such shocks possible.

Analysis

It can be shown (see for example [5]) that the deflection angle ε of the flow passing through a shock which is inclined at an angle θ to the normal to the upstream flow, as in Figure 1, is given by

$$\sin^2 \varepsilon = \frac{\frac{(p_2 - p_1)^2}{\gamma p_1 \varrho_1 q_1^2 M_1^2} \left[M_1^2 - 1 - \frac{(\gamma + 1)(p_2 - p_1)}{2\gamma p_1} \right]}{1 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \cdot \frac{p_2 - p_1}{p_1} - \frac{(p_2 - p_1)^2}{p_1 \varrho_1 q_1^2} - \frac{2(p_2 - p_1)}{\varrho_1 q_1^2}}, \quad (1)$$

where suffices 1 and 2 denote conditions upstream and downstream of the shock, respectively, p is pressure, ϱ is density, γ is the ratio of the specific heat at constant pressure to that at constant volume, M is Mach number, and q is speed. Also

$$\tan \theta = \frac{\varrho_1 q_1 q_2 \sin \varepsilon}{p_2 - p_1}. \quad (2)$$

The denominator of the right hand side of (1) is approximately equal to 1 if the

¹⁾ National Physical Laboratory, Department of Scientific and Industrial Research, Aerodynamics Division.

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 58.

upstream Mach number is not much above 1. Hence the expression

$$S = M_1^2 - 1 - \frac{(\gamma + 1)(p_2 - p_1)}{2\gamma p_1} \quad (3)$$

cannot become negative if $\sin \varepsilon$ is to be real.

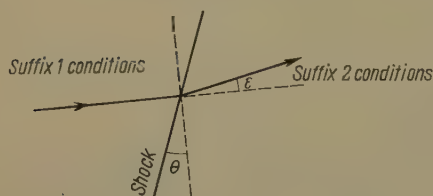


Figure 1

Flow through an oblique shock wave.

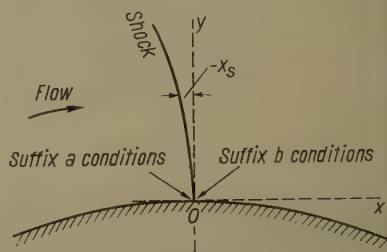


Figure 2

Shock on a curved surface.

Suppose the flow takes place over a curved boundary, and that the shock intersects the surface at a point O as in Figure 2. Let O be the origin of co-ordinates x, y parallel and perpendicular respectively to the surface at O . Denote by suffices a and b respectively conditions at the surface immediately upstream and downstream of the shock. Then

$$I_1 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right) = I_a \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_a^2 \right),$$

where I is enthalpy. Hence since the upstream flow is isentropic, so that

$$\left(\frac{I_a}{I_1} \right) = \left(\frac{p_1}{p_a} \right)^{-(\gamma-1)/\gamma},$$

equation (3) may be written

$$S = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{p_1}{p_a} \right)^{-(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right] + \left(\frac{p_1}{p_a} \right)^{-(\gamma-1)/\gamma} (M_a^2 - 1) - \frac{(\gamma + 1)}{2\gamma} \cdot \frac{(p_2 - p_1)}{p_1}. \quad (4)$$

At O , S must be zero since the flow at the surface cannot abruptly change direction and hence $\sin \varepsilon$ must be 0. Since $p_1 = p_a$, $p_2 = p_b$ at the point O , the condition $S = 0$ requires

$$\frac{p_b - p_a}{p_a} = \frac{2\gamma}{(\gamma + 1)} (M_a^2 - 1). \quad (5)$$

This, of course, is the well-known relation for the pressure rise through a normal shock. From (4) it follows that at O

$$\frac{dS}{dy} = - \frac{(\gamma + 1)}{2\gamma p_a} \left(\frac{dp_1}{dy} + \frac{dp_2}{dy} \right) + \frac{(M_a^2 - 1)}{\gamma p_a} \cdot \frac{dp_1}{dy}$$

or approximately

$$\left(\frac{dS}{dy}\right)_0 = -\frac{(\gamma+1)}{2\gamma p_a} \left\{ \left(\frac{dp_1}{dy}\right)_0 + \left(\frac{dp_2}{dy}\right)_0 \right\} \quad (6)$$

if M_a is close to 1. This expression must not be negative if S is not to become negative for small values of y .

Let $x_s(y)$ denote the x -coordinate of the shock wave. Thus if the shock is concave to the oncoming stream, as shown in Figure 2, x_s is negative. Then

$$\frac{dp_1}{dy} = \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_1 + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_1 \frac{dx_s}{dy} \quad (7)$$

and

$$\frac{dp_2}{dy} = \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_2 + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_2 \frac{dx_s}{dy}. \quad (8)$$

From (7)

$$\left(\frac{dp_1}{dy}\right)_0 = \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_a \quad (9)$$

because at 0, $dx_s/dy = 0$, the shock being perpendicular to the boundary. However $(dp_2/dy)_0$ may not be equal to $(\partial p/\partial y)_b$, since $(\partial p/\partial x)_b$ may be infinite and the product $(\partial p/\partial x)_b (dx_s/dy)_0$ may accordingly be non-zero. It is possible to relate $(\partial p/\partial x)_b$ to the shape of the shock near O , as follows.

The equations of momentum and continuity are

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad (10)$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad (11)$$

and

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (12)$$

where u and v are the velocity components in the x and y -directions. Since the Mach numbers upstream of the shock are not much above 1, p/ρ^γ is virtually constant downstream of the shock, as well as being exactly constant upstream of it. Hence the flow is approximately isentropic and irrotational everywhere, and for the downstream flow the continuity equation becomes at O

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_b + \frac{u_b}{\gamma p_b} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_b + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_b + \frac{v_b}{\gamma p_b} \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_b = 0.$$

Since $v_b = 0$ it follows from the momentum equations that $(\partial p/\partial x)_b = -u_b u_b (\partial u/\partial x)_b$ and $v_b (\partial p/\partial y)_b = 0^3$, so that

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_b = -\frac{1}{(1-M_b^2)} \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_b \quad (13)$$

³ It can be verified that these relations are true both when $x_s \propto y^{3/2}$ for small values of y , as ZIEREP assumed would be the case for flow over a concave surface, and also when the downstream flow has a singularity of the type investigated by KOPPENFELS and considered below.

and

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_b = \frac{\varrho_b u_b}{(1 - M_b^2)} \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_b. \quad (14)$$

Now

$$\frac{dv_2}{dy} = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_2 \frac{dx_s}{dy}$$

so that at O where $dx_s/dy = 0$,

$$\left(\frac{dv_2}{dy}\right)_0 = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_b^3. \quad (15)$$

Also, from Figures 1 and 2 it can be seen that $v_2 = u_2(\varepsilon + \theta - dx_s/dy)$ and $v_1 = u_1(\theta - dx_s/dy)$, so that $v_2 = u_2 v_1/u_1 + u_2 \varepsilon$, and

$$\left(\frac{dv_2}{dy}\right)_0 \simeq \frac{u_b}{u_a} \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_a \pm u_b \frac{2(M_a^2 - 1)}{(\gamma + 1) M_a^2} \left(\frac{dS^{1/2}}{dy}\right)_0 \quad (16)$$

by equations (1), (3), and (5). Also since $dx_s/dy = \theta - v_1/u_1$, it follows from equations (1) to (3) that

$$\frac{dx_s}{dy} \simeq \pm \frac{q_2}{q_1} S^{1/2} - \frac{v_1}{u_1}. \quad (17)$$

Hence from equations (6), (8), (9), (14), (15) and (16) it follows that approximately

$$\left(\frac{dS}{dy}\right)_0 = -\frac{(\gamma + 1)}{2\gamma p_a} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_a + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_b \right] - \left(S^{1/2} \frac{dS^{1/2}}{dy}\right)_0$$

since $M_a^2 - 1 \simeq 1 - M_b^2$ and $M_b^2 p_b u_b \simeq M_a^2 p_a u_a$ if M_a is not much above 1. Hence

$$\left(\frac{dS}{dy}\right)_0 = -\frac{(\gamma + 1)}{3\gamma p_a} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_a + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_b \right]. \quad (18)$$

If the boundary past which the flow takes place is denoted by $y = h(x)$, then $h(0) = h'(0) = 0$ and in the vicinity of O , $h(x) = h''(0)x^2/2$. Hence on the boundary close to O , $v \simeq h''(0)x u_a \simeq h''(0)x u_b$, and from equation (11),

$$\frac{\partial p}{\partial y} \simeq -\varrho_a u_a^2 h''(0) \simeq -\varrho_b u_b^2 h''(0).$$

It seems, therefore, at first sight that both $(\partial p/\partial y)_a$ and $(\partial p/\partial y)_b$ must be approximately equal to $-\varrho_a u_a^2 h''(0)$. Equation (18) thus gives approximately

$$\left(\frac{dS}{dy}\right)_0 = \frac{2(\gamma + 1) h''(0)}{3}.$$

If the surface is convex to the stream, $h''(0)$ is negative, so that $(dS/dy)_0$ is negative, and this, as pointed out above, is incompatible with the shock relations. Thus it follows from (17) that for small values of y

$$\frac{dx_s}{dy} = \pm \left(\frac{2(\gamma + 1)}{3} h''(0) y \right)^{1/2}, \quad (19)$$

which is imaginary when the surface is convex. It might seem, therefore, that normal shocks cannot occur on convex curved surfaces.

However it is possible to envisage a singularity in the downstream flow of such a kind that $(\partial p/\partial y)_b$ is not equal to $-\varrho_a u_a^2 h''(0)$ even though $\partial p/\partial y \simeq -\varrho_a u_a^2 h''(0)$ when $y = 0$ and x is very small but non-zero. Such a flow would be similar to the low-speed flow considered by KOPPENFELS [4], past a wall with a discontinuity in curvature, as in Figure 3. The velocity components close to the discontinuity

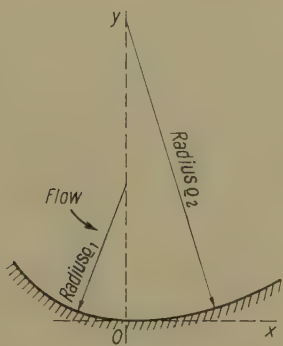


Figure 3
Boundary with a discontinuity in curvature.

approximate, according to KOPPENFELS' solution, to the form

$$\frac{u}{u_b} = 1 - 2(c_1 + c_2)x \log_e c_3 (x^2 + y^2)^{1/2} + 2 \left[\pi c_2 + (c_1 + c_2) \tan^{-1} \frac{y}{x} \right] y \quad (20)$$

and

$$\frac{v}{u_b} = 2(c_1 + c_2)y \log_e c_3 (x^2 + y^2)^{1/2} + 2 \left[\pi c_2 + (c_1 + c_2) \tan^{-1} \frac{y}{x} \right] x, \quad (21)$$

where c_1 , c_2 , and c_3 are constants with the dimension (length)⁻¹. It may easily be verified that these relations satisfy the condition for irrotational flow, $\partial u/\partial y = \partial v/\partial x$, as well as the continuity condition $\partial u/\partial x = -\partial v/\partial y$. For $y = 0$, $v/u_b = 2\pi c_2 x$, when x is positive, and $v/u_b = -2\pi(c_1 + 2c_2)x$ when x is negative, whilst $u \simeq u_b$ for small positive or negative values of x . Hence (20) and (21) represent a flow past a wall with a radius of curvature equal to $\varrho_1 = 1/2\pi(c_1 + 2c_2)$ for small negative values of x , and a radius $\varrho_2 = 1/2\pi c_2$ for small positive x , as shown in Figure 3.

This solution may readily be extended to a case where compressibility is important. Consider the relations

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{u_b} = 1 - \frac{2(c_1 + c_2)x}{(1 - M_b^2)^{1/2}} \log_e c_3 [x^2 + (1 - M_b^2)y^2]^{1/2} \\ + 2 \left[\pi c_2 + (c_1 + c_2) \tan^{-1} \frac{(1 - M_b^2)^{1/2} y}{x} \right] y \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

and

$$\left. \begin{aligned} \frac{v}{u_b} = & 2 (c_1 + c_2) (1 - M_b^2)^{1/2} y \log_e c_3 [x^2 + (1 - M_b^2) y^2]^{1/2} \\ & + 2 \left[\pi c_2 + (c_1 + c_2) \tan^{-1} \frac{(1 - M_b^2)^{1/2} y}{x} \right] x. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

These are of course related to the incompressible forms (20) and (21) by the ordinary Prandtl-Glauert rule; this would not normally be valid for transonic flow with M_b close to 1, but it is so sufficiently close to the origin in the present case because of the boundary conditions on v and because of the logarithmic terms. The irrotational condition $\partial u / \partial y = \partial v / \partial x$ is still satisfied, whilst $\partial u / \partial x = -(\partial v / \partial y) / (1 - M_b^2)$. Thus condition (13) is satisfied, and it is therefore possible that relations (22) and (23) may represent conditions downstream of the shock. For $y = 0$, $v/u_b = 2\pi c_2 x$ when x is positive, as for the low-speed solution. Thus the radius of curvature of the surface downstream is equal to $\varrho_2 = 1/2\pi c_2$, where a positive value of ϱ_2 means that the surface is concave to the stream as in Figure 3. If, then, the equation to the boundary is $y = h(x)$, as before, $\varrho_2 = 1/h''(0)$ and

$$c_2 = \frac{h''(0)}{2\pi}. \quad (24)$$

There are two other disposable constants, c_1 and c_3 , and of these c_1 may be found as follows.

Conditions denoted by suffix b in the earlier analysis can now be considered to be the limiting values obtained by setting $x = 0$ in the appropriate quantities derived from equations (22) and (23), and then making y very small. Hence, since from equations (15) and (16),

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_b \simeq \pm u_b \frac{2(M_a^2 - 1)}{(\gamma + 1)M_a^2} \left(\frac{dS^{1/2}}{dy} \right)_0,$$

it follows that

$$\frac{dS^{1/2}}{dy} = \pm \frac{(\gamma + 1)M_a^2}{(M_a^2 - 1)} (c_1 + c_2) (1 - M_b^2)^{1/2} \log_e c_3 (1 - M_b^2)^{1/2} y$$

for vanishingly small y . Thus $S^{1/2} \propto y \log_e c_3 (1 - M_b^2)^{1/2} y$, and

$$\frac{dS}{dy} = 2S^{1/2} \left(\frac{dS^{1/2}}{dy} \right) \rightarrow 0$$

as $y \rightarrow 0$. Hence from equation (18),

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_a + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_b = 0.$$

But from equation (11)

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_a = -\varrho_a u_a^2 h''(0)$$

whilst

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_b = -\varrho_b u_b^2 (3\pi c_2 + \pi c_1),$$

since downstream of the shock close to O

$$\frac{\partial p}{\partial y} \simeq -2 \varrho_b u_b^2 \left[\pi c_2 + (c_1 + c_2) \tan^{-1} \frac{(1 - M_b^2)^{1/2} y}{x} \right]$$

by (11), (22), and (23). Hence, since $\varrho_b u_b^2 \simeq \varrho_a u_a^2$,

$$3 \pi c_2 + \pi c_1 = -h''(0)$$

and from (24),

$$c_1 = -\frac{5}{2\pi} h''(0). \quad (25)$$

Thus, if $h''(0)$ is negative, as it is for a convex surface, the downstream flow is effectively the same as flow past a boundary of the shape shown in Figure 4, with

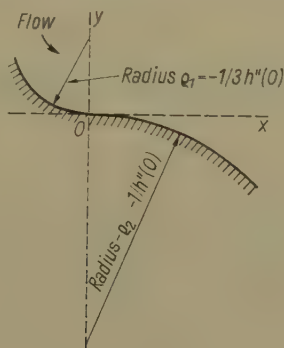


Figure 4

Equivalent boundary for the downstream flow.

$\varrho_1 = 1/2 \pi (c_1 + 2 c_2) = -1/3 h''(0)$, and $-\varrho_2 = -1/h''(0)$. However the solution only applies, of course, to the shock-wave case for positive values of x .

The x -component pressure gradient downstream of O can easily be shown from (10), (22) and (23) to be

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{2 \varrho_b u_b^2}{(1 - M_b^2)^{1/2}} (c_1 + c_2) \log_e c_3 [x^2 + (1 - M_b^2) y^2]^{1/2}.$$

Hence along the surface

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{4 \varrho_b u_b^2}{\pi (1 - M_b^2)^{1/2}} h''(0) \log_e c_3 \lambda \quad (26)$$

by (24) and (25). If the surface is convex (26) shows that the pressure diminishes very rapidly along the surface downstream of the shock, although at the shock the full normal-shock pressure rise is attained. This is in line with EMMONS' relaxation solutions.

Thus the argument that normal shocks cannot occur on a convex surface is shown to be inconclusive. It has still not been established of course that they *can* exist, though EMMONS' work would suggest this. If they can exist, it seems quite

likely that relations (22) to (26) would be valid not only for convex surfaces, where $h''(0) < 0$, but also for concave surfaces. In other words equation (19) may be invalid even for concave surfaces. A more elaborate investigation, considering the second derivatives of quantities along the shock wave, would be necessary to settle this point.

Acknowledgment

The work described above was carried out in the Aerodynamics Division of the National Physical Laboratory, and is published by permission of the director of the laboratory.

REFERENCES

- [1] J. ZIEREP, *Der senkrechte Verdichtungsstoss am gekrümmten Profil*, Z. angew. Math. Phys. 9b, 764 (1958). See also supplement to the above, Z. angew. Math. Phys. 10, 429 (1959).
- [2] H. W. EMMONS, *The Theoretical Flow of a Frictionless, Adiabatic, Perfect Gas Inside of a Two-Dimensional Hyperbolic Nozzle*, N.A.C.A. Tech. Note 1003 (1946).
- [3] H. W. EMMONS, *Flow of a Compressible Fluid Past a Symmetrical Airfoil in a Wind Tunnel and in Free Air*, N.A.C.A. Tech. Note 1746 (1948).
- [4] W. v. KOPPENFELS, *Ebene Potentialströmung längs einer glatten Wand mit stückweise stetiger Krümmung*, Luftfahrtforschung 17 (7), 189–195 (1940). Translated as: *Two-Dimensional Potential Flow Past a Smooth Wall with Partly Constant Curvature*, N.A.C.A. Tech. Memo. 996 (1941).
- [5] G. E. GADD, *The Interaction Between a Weak Normal Shock Wave and a Turbulent Boundary Layer*, A.R.C. C.P. 424 (June 1957).

Zusammenfassung

Es zeigt sich, dass in der Tat senkrechte Stosswellen an einem Körper mit konvexen Oberflächen bei reibungsfreier transsonischer Strömung auftreten können, wenn diese Strömung unmittelbar stromabwärts des Stosses eine Singularität besitzt und diese zur Singularität in der Strömung über eine Grenzfläche mit Krümmungsdiskontinuität ähnlich ist.

(Received: July 2, 1959.)

Numerical Solutions of the Van der Pol Equation

By WASLEY S. KROGDahl, Lexington, Kentucky, USA¹⁾

It is well known that the Van der Pol equation

$$\ddot{x} + x = \mu \dot{x} (1 - x^2)$$

has limit cycle solutions for all $\mu \geq 0$ [3, 4]²⁾. The period, amplitude, and certain other parameters of the limit cycle solutions are known in asymptotic form in the limit of very small or very large μ [5, 6]. However, the characteristics of the solutions for intermediate values of μ are to be had only by obtaining the limit cycle solutions numerically. The desirability of obtaining them has been pointed out by LEFSCHETZ [2].

The solutions for integral μ from 1 to 10 inclusive have been obtained by numerical integration using GILL's modification [1] of the Runge-Kutta method. The computations were carried out on the IBM 650 calculator of the Northwestern University Computing Center. Subsequent independently programmed check calculations were made on the 650 calculator of the University of Kentucky Computing Center.

The limit cycle in each case was identified as that solution whose half-period amplitude was equal to the initial amplitude. The half-period was determined as the value of the independent variable t at the first zero of $\dot{x} = dx/dt$, the integration having been started in each instance at a trial amplitude $x(0) = a_0$, where $\dot{x}(0) = 0$.

The results are contained in the three graphs and Table 1. The first graph is a plot of x as a function of t , the different curves corresponding to the indicated values of μ . Similarly, the second graph shows \dot{x} against t , the 'velocity' as a function of 'time'. The third graph is the phase plane diagram of each solution over a half cycle.

Table 1 compares the computed amplitudes a_0 and semi-periods $P_0/2$ with the same quantities calculated from the asymptotic formulae for large μ . To obtain some notion of the accuracy of the computed values, certain additional calculations were made. Thus, sample calculations were re-run using a double integration interval. Negligible differences in the two solutions indicate that the original interval was sufficiently small that truncation errors are of no consequence. On the other hand, by transforming the independent variable to $\tau = \mu t$, we are assured of negligible truncation errors but, because of the μ -fold increase in number of steps, an estimate of the round-off error becomes possible. Only a coincidental compensation of the two sources of error could lead to the same solutions, and that for probably no more than one value of μ . Such considerations offer reason to think the computed values correct to as many figures as given.

The formulae used for the asymptotic values are

$$a^* = 2.0 + 0.779369 \mu^{-4/3} - \frac{16}{27} \cdot \frac{\log \mu}{\mu^2} - 0.8762 \mu^{-2} + O(\mu^{-8/3}) \quad (2)$$

and

$$\frac{P^*}{2} = 0.806853 \mu + 3.50716 \mu^{-1/3} - \frac{11}{9} \cdot \frac{\log \mu}{\mu} + 0.00435 \mu^{-1} + O(\mu^{-4/3}) \quad (3)$$

¹⁾ University of Kentucky.

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 63.

Table 1

μ	a_0	a^*	$a_0 - a^*$	$\frac{P_0}{2}$	$\frac{P^*}{2}$	$\frac{1}{2} (P_0 - P^*)$
0	2.0			3.14159		
1	2.00862	1.90317	0.10545	3.33164	4.31836	-0.98672
2	2.01989	1.98755	0.03234	3.81493	3.97593	-0.16100
3	2.02330	2.01044	0.01286	4.42973	4.40616	+0.02357
4	2.02296	2.01664	0.00632	5.10184	5.01428	0.08756
5	2.02150	2.01796	0.00354	5.80621	5.69272	0.11349
6	2.01983	2.01765	0.00218	6.53061	6.40692	0.12369
7	2.01813	2.01678	0.00135	7.26901	7.14223	0.12678
8	2.01667	2.01577	0.00090	8.01814	7.89125	0.12689
9	2.01536	2.01474	0.00062	8.77507	8.64984	0.12523
10	2.01428	2.01377	0.00051	9.53817	9.41542	0.12275

It can be seen that in view of the relatively low order of approximation of the asymptotic formulae, for μ as small as 10 the agreement between asymptotic and computed values is surprisingly good.

Supplementary computations of solutions in the neighborhood of the limit cycle solutions were also carried out to investigate numerically the behavior of the 'period' as a function of 'amplitude'. When the true amplitude a_0 had been determined, additional solutions were obtained for the initial conditions $\dot{x} = 0$ and $x_0 = a = 0.9 a_0, 0.95 a_0, 1.05 a_0$, and $1.1 a_0$. The first subsequent zero of \dot{x} was taken to define the 'semi-period' to be associated with the 'amplitude' a just as the true semi-period $P_0/2$ is associated with the true amplitude a_0 . Table 2 summarizes these results.

The content of Table 2 may be brought out more clearly by using it to construct the quantity $\gamma = P/P_0 - 1$ as a function of $z = 20 (a/a_0 - 1)$. The data are sufficient that one may fit to them a quartic in z . Thus, let

$$\gamma = \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4,$$

γ being zero at $z = 0$. The coefficients α, β, γ , and δ computed from Table 2 are given in Table 3 as a function of μ . Because α is positive (and in all cases larger than β), it is evident that larger initial amplitudes than the limit cycle amplitude give longer periods. Moreover, because α increases with μ , a given increase of initial amplitude produces a greater increase in period for large μ than for small.

This result implies consequences of interest for mechanical systems whose motion is described by the van der Pol equation. Thus, suppose that such a system is subject to occasional impulsive perturbations. The effect of such perturbations is to cause the system to describe a solution associated with some new initial amplitude; the system moves abruptly from one solution of the family of solutions whose parameter is a_0 to some other solution whose parameter is $a_0 + \Delta a$. The first point to be noted is that even if the frequency distribution in Δa is symmetric, because $\beta > 0$ there is in the long run a greater lengthening of the period than shortening. The mean period of the perturbed system is therefore greater than the 'true' period as given by the appropriate value of μ .

Table 2

$$P/P_0$$

μ \ a/a_0	0.90	0.95	1.05	1.10
1	0.928842	0.962222	1.042216	1.088842
2	0.857791	0.925179	1.081959	1.170813
3	0.811063	0.900063	1.107907	1.224469
4	0.779769	0.884685	1.125451	1.260820
5	0.757797	0.873236	1.137823	1.286481
6	0.741754	0.864865	1.146879	1.305274
7	0.729642	0.858546	1.153727	1.319491
8	0.720264	0.853645	1.159044	1.330534
9	0.712819	0.849755	1.163264	1.339299
10	0.706802	0.846609	1.166678	1.346393

Table 3

μ	$10^6 \alpha$	$10^6 \beta$	$10^6 \gamma$	$10^6 \delta$
1	+ 39996	+ 2222	+ 1	- 3
2	78435	3567	- 45	+ 2
3	103513	4432	- 40	2
4	120423	5066	- 40	2
5	132334	5528	- 41	2
6	141049	5870	- 42	2
7	147633	6135	- 43	2
8	152743	6343	- 44	2
9	156799	6508	- 45	2
10	+ 159989	+ 6641	- 46	+ 2

Secondly, the increase of β with μ implies that this effect is exaggerated with increasing μ . This has bearing, for example, upon systems such as the sequence of unstable stars, ranging from the very regular short-period cepheids at one extreme to the very irregular and extremely long-period novae at the other. If we assume that their radial oscillations are described to a first approximation by the van der Pol equation we may conclude that though small μ corresponds to the short-period cepheids and large μ to the novae, the parameter value associated with the latter may be considerably less than is required by the value of the observed mean period alone.

Thirdly, the 'regularity' of any such mechanical systems must be greater when μ is small than when μ is large since a given Δa has less effect on account of the smaller α . This is reflected in nearly perfectly cyclical behavior of cepheids, the approach to the irregularity of relaxation oscillations by the U Geminorum stars and repeating novae.

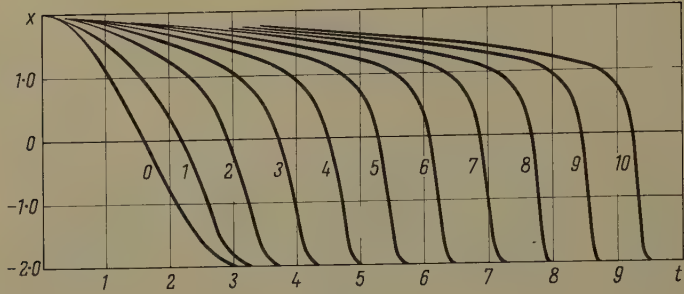


Figure 1

Periodic solutions of the Van der Pol equation over half periods. Each curve is identified by the respective parameter value.

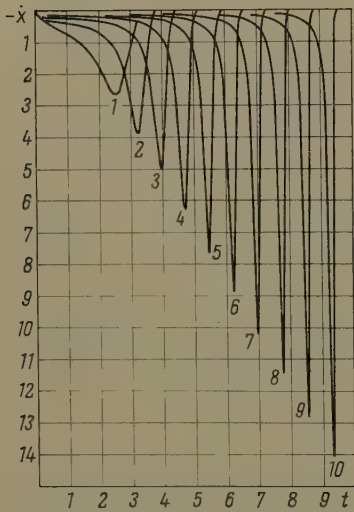


Figure 2

Derivative of the periodic solutions of the Van der Pol equation over half periods. Curves are identified by their respective Van der Pol parameters.

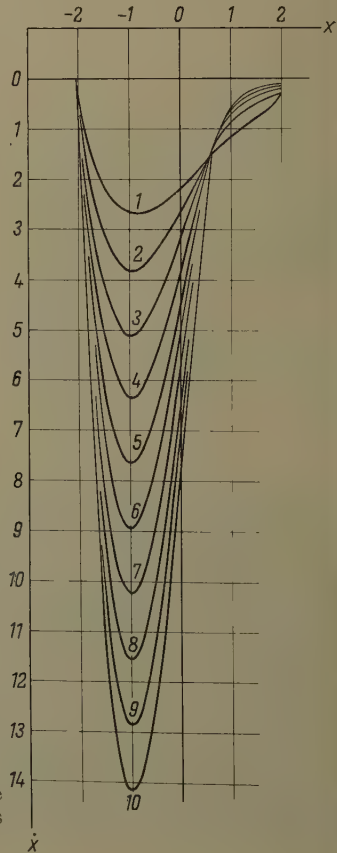


Figure 3

Lower half of the phase plane diagrams of the limit cycle solutions of the Van der Pol equation for parameter values $\mu = 1, 2, \dots, 10$.

It is a pleasure to acknowledge the generous and invaluable assistance of Dr. D. L. HARRIS III of the Northwestern University Computing Center and of Mr. RONALD GORDON of the University of Kentucky. I wish also to make grateful acknowledgment of funds from the National Science Foundation under grant NSF-G-5008 for that portion of the work done at Northwestern University.

REFERENCES

- [1] S. GILL, *A Process for the Step-by-Step Integration of Differential Equations in an Automatic Digital Computing Machine*, Proc. Camb. phil. Soc. 47, 96 (1951).
- [2] S. LEFSCHETZ, *Numerical Calculations in Nonlinear Mechanics*, in *Problems for the Numerical Analysis of the Future*, Nr. 15 (1951), Applied Mathematics Series (National Bureau of Standards), p. 10.
- [3] N. MINORSKY, *Introduction to Non-Linear Mechanics* (Edwards, 1947), pp. 113–115.
- [4] A. ANDRONOW and C. CHAIKIN, *Theory of Oscillations* (S. Lefschetz, ed., Princeton, 1949), p. 343.
- [5] J. STOKER, *Nonlinear Vibrations* (Interscience, 1950), p. 134.
- [6] A. DORODNITSYN, *Asymptotic Solution of the Van der Pol Equation*, Prikl. Mat. Mekh., Inst. Mech. Acad. Sci. USSR. 11, 313 (1947).

Zusammenfassung

Die Amplitude und Periode der periodischen Lösungen der van der Polschen Gleichung sind für sehr kleine und für sehr grosse Werte des Parameters μ durch asymptotische Entwicklungen annähernd bekannt. Für endliche Werte von μ werden die Resultate von numerischen Integrationsmethoden mitgeteilt, und der Anschluss an die asymptotischen Werte wird diskutiert. Ausserdem werden Störungen der Differentialgleichung betrachtet.

(Received: July 2, 1959.)

Plate Thermometer

By DAVID MEKSYN, London, Great Britain¹⁾

1. Introduction

The problem of a plate thermometer was first considered by POHLHAUSEN [1]²⁾. The equation of energy is reduced to an ordinary linear differential equation with known coefficients, and the temperature function is expressed as a double integral. This integral was first evaluated numerically by POHLHAUSEN for several moderate values of Prandtl number σ , and later by ECKERT and DREWITZ [2] for many values of σ , up to $\sigma = 1000$.

For moderate values of σ (< 100) the numerical evaluations lead to satisfactory results, but for larger σ the errors begin to increase, and for $\sigma = 1000$ the result is grossly in error (up to 20%). The double integral becomes very slowly

¹⁾ Mathematics Department, Royal College of Science.

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 68.

convergent, as σ increases, and it would require several hundred terms to give a moderately satisfactory result for $\sigma = 1000$.

The aim of the present paper is to indicate a simple method of evaluation of this integral, which leads to satisfactory results, as follows.

The independent variable is changed, and the integral is expressed as a power series, depending on σ ; the first few terms (~ 10) are evaluated in the usual way; the remaining terms are transformed by making use of STIRLING's formula, and the sum is then transformed into an integral by making use of EULER-MACLAUREN's equation. The final result, which consists of few terms, is expressed in gamma functions.

2. The Equation of Energy

Fluid flows past a semi-infinite plate, placed in the direction of the main flow; the velocity and the temperature of the main flow are U_0 and T_0 respectively; there is no heat transfer between the plate and the fluid.

The problem consists in finding the temperature of the plate, in this case we have to take into account the heat generated by friction.

The equation of energy is [3]

$$\frac{d^2\theta}{d\eta^2} + \sigma f \frac{d\theta}{d\eta} + 2\sigma \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right)^2 = 0, \quad (2.1)$$

where

$$T = T_0 + \frac{U_0^2}{2c_p} \theta, \quad \eta = \left(\frac{U_0}{2\nu x} \right)^{1/2} y;$$

the boundary conditions are

$$\frac{d\theta}{d\eta} = 0 \quad \text{at} \quad \eta = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{at} \quad \eta = \infty. \quad (2.2)$$

$f(\eta)$ is a solution of BLASIUS' equation

$$f''' + f f'' = 0, \quad (2.3)$$

and it satisfies the boundary conditions

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1. \quad (2.4)$$

The solution of (2.1), which satisfies the boundary conditions, is

$$\theta(\eta) = 2\sigma \int_{\eta}^{\infty} (f'')^{\sigma} d\eta \int_0^{\eta} (f'')^{2-\sigma} d\eta. \quad (2.5)$$

Now [4]

$$f'' = a e^{-F(\eta)}, \quad (2.6)$$

where

$$F(\eta) = \int_0^{\eta} f(\eta) d\eta;$$

whence

$$\theta(\eta) = 2\sigma a^2 \int_{\eta}^{\infty} e^{-\sigma F} d\eta \int_0^{\eta} e^{(\sigma-2)F} d\eta, \quad (2.7)$$

where

$$F(\eta) = \frac{a \eta^3}{3!} - \frac{a^2 \eta^6}{6!} \pm \frac{11 a^3 \eta^9}{9!} - \frac{375 a^4 \eta^{12}}{12!} + \dots,$$

$$a = 0.4696.$$

3. Transformation of the Integral

We have to find $\theta(0)$, where

$$\theta(0) = 2 \sigma a^2 \int_0^{\infty} e^{-\sigma F} d\eta \int_0^{\eta} e^{(\sigma-2)F} d\eta. \quad (3.1)$$

A glance at (3.1) shows that the integral becomes very slowly convergent for large σ .

To evaluate (3.1), it is transformed by putting

$$F(\eta) = \tau; \quad (3.2)$$

inverting (3.2) and transforming $\theta(0)$ to the τ variable, we find

$$\theta(0) = 2 \sigma a^2 \int_0^{\infty} e^{-\sigma \tau} \frac{d\eta}{d\tau} d\tau \int_0^{\tau} e^{(\sigma-2)\tau} \frac{d\eta}{d\tau} d\tau; \quad (3.3)$$

from (2.7), (3.2) follows [4] that

$$\eta = \left(\frac{6}{a}\right)^{1/3} \left\{ \tau^{1/3} + \frac{\tau^{4/3}}{60} - \frac{\tau^{7/3}}{1260} + \frac{23 \tau^{10/3}}{891000} - \dots \right\}. \quad (3.4)$$

Making use of (3.4), where only the first two terms are retained, expanding the inner integral in powers of τ and integrating in gamma functions, we find

$$\theta(0) = C \sigma^{1/3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n + \frac{2}{3}\right)}{\Gamma(n+1) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) (3n+1)} \times \left[\left(\frac{\sigma-2}{\sigma}\right)^n + \frac{\left(2n - \frac{1}{3}\right)n}{15 \left(n - \frac{2}{3}\right)} \cdot \frac{(\sigma-2)^{n-1}}{\sigma^n} \right], \quad (3.5)$$

where

$$C = \frac{2}{3} a^2 \left(\frac{6}{a}\right)^{2/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = 1.088.$$

The first ten terms can be easily evaluated; to find the sum of the remaining terms we transform the coefficients by making use of the asymptotic expansion of the gamma function, and then transform the sum into an integral by making use of EULER-MACLAUREN'S formula.

Consider the coefficient

$$a_n = \frac{\Gamma\left(n + \frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \Gamma(n+1) (3n+1)}; \quad (3.6)$$

by making use of the asymptotic expansion [5]

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} e^{-x} x^{x-1/2} \left\{ 1 + \frac{1}{12x} + \dots \right\}, \quad (3.7)$$

where only the dominant term is retained, we obtain

$$a_n = \frac{e^{1/3} \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{n+1/6}}{n^{4/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) 3 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1/2} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)}. \quad (3.8)$$

Now,

$$\left(1 + \frac{2}{3n}\right)^n = \exp \left\{ n \log \left(1 + \frac{2}{3n}\right) \right\} \approx e^{2/3} \left(1 - \frac{2}{9n}\right). \quad (3.9)$$

Transforming similarly the remaining factors we find

$$a_n = \frac{1 - \frac{4}{9n}}{3 \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) n^{4/3}}; \quad (3.10)$$

the expression in (3.5) depending on σ becomes

$$\left(\frac{\sigma-2}{\sigma}\right)^n \left[1 + \frac{n(2n-1/3)}{15 \left(n - \frac{2}{3}\right) (\sigma-2)} \right] \approx \left(\frac{\sigma-2}{\sigma}\right)^n \left[1 + \frac{2n}{15(\sigma-2)} \right]. \quad (3.11)$$

Combining (3.10), (3.11) we obtain for the sum (3.5)

$$\frac{1}{3 \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \sum_{n=n_1}^{\infty} \left[1 + \frac{2n}{15(\sigma-2)} - \frac{4}{9n} \right] \left(\frac{\sigma-2}{\sigma}\right)^n n^{-4/3}. \quad (3.12)$$

For large σ we can put

$$\left(\frac{\sigma-2}{\sigma}\right)^n = \exp \left[n \log \left(1 - \frac{2}{\sigma}\right) \right] \approx e^{-n\varepsilon}, \quad (3.13)$$

where

$$\varepsilon = \frac{2}{\sigma}.$$

We transform now the sum (3.12) into an integral by making use of EULER-MACLAUREN'S formula [5].

$$\int_a^{a+\tau\omega} F(x) dx \approx \omega \left[\frac{1}{2} F(a) + F(a+\omega) + F(a+2\omega) + \dots + \frac{1}{2} F(a+\tau\omega) \right]; \quad (3.14)$$

in our case $\omega = 1$; whence

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}} \left[1 + \frac{2n}{15(\sigma-2)} - \frac{4}{9n} \right] \left(\frac{\sigma-2}{\sigma} \right)^n \cdot \frac{1}{2n_1^{4/3}} \left[1 + \frac{2n_1}{15(\sigma-2)} - \frac{4}{9n_1} \right] \\ & \times \left(\frac{\sigma-2}{\sigma} \right)^{n_1} + \int_{n_1}^{\infty} \left(n^{-4/3} - \frac{4}{9} n^{-7/3} + \frac{2}{15(\sigma-2)} n^{-1/3} \right) e^{-\varepsilon n} dn. \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

Integrating by parts, we find

$$\left. \begin{aligned} & \int_{n_1}^{\infty} \dots = \frac{3}{n_1^{1/3}} \left(1 - \frac{1}{9n_1} + \frac{\varepsilon}{3} \right) e^{-\varepsilon n_1} \\ & - 3\varepsilon^{1/3} \left[1 + \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\sigma}{45(\sigma-2)} \right] \left[\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) - \gamma\left(\frac{2}{3}, \varepsilon n_1\right) \right], \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

where γ is the incomplete gamma function

$$\left[\gamma\left(\frac{2}{3}, \infty\right) = \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \right];$$

finally

$$\left. \begin{aligned} \theta(0) = 1.088 \sigma^{1/3} & \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{n_1-1} \frac{\Gamma\left(n + \frac{2}{3}\right)}{(3n+1) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \Gamma(n+1)} \right. \\ & \times \left[\left(\frac{\sigma-2}{\sigma} \right)^n + \frac{\left(2n - \frac{1}{3}\right)n}{15\left(n - \frac{2}{3}\right)} + \frac{(\sigma-2)^{n-1}}{\sigma^n} \right] \\ & + \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(n_1 + \frac{2}{3}\right)}{(3n_1+1) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \Gamma(n_1+1)} \\ & \times \left[\left(\frac{\sigma-2}{\sigma} \right)^{n_1} + \frac{\left(2n_1 - \frac{1}{3}\right)n_1}{15\left(n_1 - \frac{2}{3}\right)} \cdot \frac{(\sigma-2)^{n_1-1}}{\sigma^{n_1}} \right] \\ & \left. + 0.2462 \int_{n_1}^{\infty} \dots \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

where (3.12)

$$0.2462 = \frac{1}{3 \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}.$$

In the table are given a few of the results obtained (the current values are indicated in parentheses):

σ	15	100	300	1000	∞
$\theta(0)$	3.6	7.8 (7)	11.6 (10)	17.9 (14)	$1.9 \sigma^{1/3}$

REFERENCES

- [1] E. POHLHAUSEN, *Z. angew. Math. Mech.* 7, 115 (1921).
- [2] E. ECKERT and O. DREWITZ, *Luftfahrtforschung* 19, 187 (1942).
- [3] H. SCHLICHTING, *Grenzschicht-Theorie*, 3rd ed. (Verlag G. Braun, Karlsruhe 1958).
- [4] D. MEKSYN, *Proc. Roy. Soc. [A]* 237, 543 (1956).
- [5] E. T. WHITTAKER and G. N. WATSON, *A Course of Modern Analysis*, 4th ed. (Cambridge University Press, 1949).

Zusammenfassung

Das Doppelintegral, das mit der Temperatur eines Plattenthermometers zusammenhängt, konvergiert langsam bei grossen Werten der Prandtl-Zahl σ . Es wird eine Methode angedeutet, um dieses Integral für alle nicht zu kleinen Werte von σ auszurechnen. Bei $\sigma = 1000$ ist der ausgerechnete Wert ungefähr 20% grösser, als gewöhnlich angenommen wird.

(Received: July 20, 1959.)

Varia – Miscellaneous – Divers

**Réunion d'automne de la Société Suisse de Physique
dans le cadre de la 139^e assemblée annuelle de la Société Helvétique
des Sciences naturelles, à Lausanne le 12 septembre 1959**

Compte rendu des communications de physique et de mathématiques appliquées

**Ein stabiler Thermostat zur Messung des Rauschens und des Drifts
von Halbleiter-Schaltelementen.** Von E. BALDINGER und A. MAIER, Basel¹⁾.

Messungen des Rauschens und des Drifts von Halbleiter-Schaltelementen sind sowohl von praktischem als auch von theoretischem Interesse. Praktisch geben sie Aufschluss über die in Schaltungen erreichbare Genauigkeit, theoretisch liefern sie Aussagen über die Halbleiter selbst. Speziell mit den Vorgängen an deren Ober-

¹⁾ Institut für angewandte Physik, Universität Basel.

fläche ist der «excess noise» verknüpft, dessen Spektrum im bisher untersuchten Frequenzgebiet (oberhalb etwa 10^{-4} Hz) mit $(1/f)^n$ verläuft, wobei n , je nach dem Objekt, in der Regel zwischen 1 und 1,5 liegt²⁾. Bei genügend tiefen Frequenzen kann man eine Abweichung von diesem Verlauf erwarten³⁾, deren Lage und Art weiteren Aufschluss über das Oberflächenrauschen liefern würde.

Entsprechende Messungen von Rauschspannungen erfordern, unter Berücksichtigung des Temperaturkoeffizienten, dass die Temperatur der Objekte über mehrere Tage auf etwa 1 mGrad konstant gehalten wird. Im folgenden soll ein Thermostat beschrieben werden, der diesen Anforderungen genügt und der auch ganz allgemein als Präzisionsthermostat verwendbar ist.

Aufbau

Der thermostierte Raum besteht aus einem gerührten 20-Liter-Ölbad, dem innern Thermostaten, der wärmeisoliert (0,5 W/Grad) in einem zweiten, dem äußern Thermostaten, eingeschlossen ist. Letzterer reduziert die Schwankungen der Raumtemperatur um den Faktor 400, wird aber durch elektrische Zuleitungen und die mechanische Antriebswelle (Plexiglas) zwischen Aussenraum und innerem Thermostaten zu einem geringen Teil überbrückt.

Die Festlegung der Temperatur des inneren Thermostaten erfordert die Mittel der Präzisionsthermometrie. Abgesehen von den Temperaturfixpunkten, die sich für Thermostatregelung nicht unmittelbar eignen, gelten als genaueste Instrumente im fraglichen Temperaturgebiet um 30°C die Platin-Widerstandsthermometer.

Im vorliegenden Thermostaten wird ein 100-Ω-Pt-Thermometer verwendet, das in einer Brückenschaltung mit 0,1 V Wechselspannung von 1000 Hz gespiesen wird. Die Ausgangsspannung der Brücke wird verstärkt, in einer dem Ringmodulator ähnlichen Schaltung gleichgerichtet und zur Steuerung der Heizung benützt. Die gesamte Schaltung hat eine Bandbreite von etwa 0,5 Hz. Sie ist voll transistorsiert.

Temperaturkonstanz

Die verstärkte und gleichgerichtete Ausgangsspannung der Brücke ist ein Mass für die Temperatur des Thermostaten. Aus ihrer Registrierung lässt sich dessen *zeitliche Konstanz* ermitteln (Tabelle 1). Allerdings bleiben auf diese Art gewisse Effekte, wie etwa eine Veränderung des Pt-Thermometers selbst, unbemerkt. Solche Erscheinungen können nur durch Verwendung mehrerer voneinander unabhängiger Temperaturregistrierungen aufgedeckt werden.

Tabelle 1
Temperaturschwankungen im Thermostaten

Beobachtungsdauer	Quadratischer Mittelwert der Temperaturschwankung	Maximale Abweichung von der mittleren Temperatur
10 min	0,02 mGrad	$\pm 0,06$ mGrad
100 h Dauerbetrieb	0,06 mGrad	$\pm 0,15$ mGrad

²⁾ R. H. KINGSTON, J. appl. Phys. 27, 114 (1956).

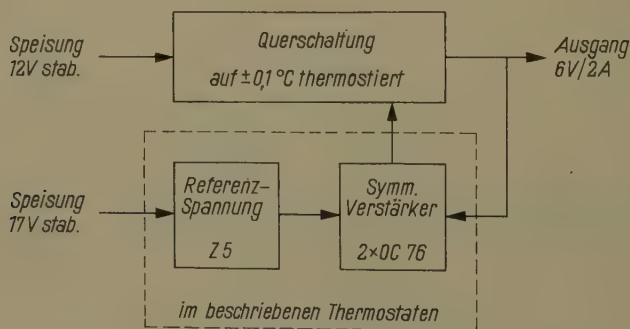
³⁾ A. L. McWHORTER, *Semiconductor Surface Physics*, edited by R. H. KINGSTON (Philadelphia 1957), S. 209.

Das Temperaturfeld im innern Thermostaten ist notwendig inhomogen, sobald in dessen Innenraum Wärme zugeführt wird. Bei einer Wärmezufuhr von 1,8 W und einer Rührgeschwindigkeit von 130 U./min ergab sich in einer provisorischen Messung eine Temperaturdifferenz von 3 mGrad zwischen Zentrum und Rand. Bei der Untersuchung von Objekten kleiner Leistung wird man normalerweise mit etwa einem Zehntel dieser Heizleistung auskommen und infolgedessen nur mit 0,3 mGrad Temperaturdifferenz rechnen müssen.

Ein störender Nebeneffekt des Rührens ist zu beachten. Der Wärmeübergang von den geheizten Elementen an das Ölbad hängt von der Grösse der Oberfläche und der Strömungsgeschwindigkeit des Öls ab. Letztere ist durch das Rühren Schwankungen unterworfen, welche sich, besonders stark bei kleiner Oberfläche, in Schwankungen des Wärmeübergangs und, damit der Temperatur der geheizten Elemente auswirken. So resultiert zum Beispiel in einer Intermetall-Zener-Diode Z 6 bei 60 mW Leistung eine mittlere Temperaturschwankung von 5 mGrad. Dieser Effekt lässt sich dadurch stark reduzieren, dass die Zener-Diode mit Woodschem Metall in einen 20-cm³-Messingzylinder eingegossen wird. Man profitiert dabei sowohl von der grossen Oberfläche als auch von der örtlichen und zeitlichen Mittelung.

Experimente

Im Rahmen unserer Untersuchung über stabilisierte Transistornetzgeräte wurden die temperaturempfindlichen Teile einer Querschaltung in den beschriebenen Thermostaten gebracht. Die Schaltung ist eine für diesen Versuch leicht modifizierte Ausführung (Figur 1) eines bereits beschriebenen⁴⁾ Gerätes. Die Abänderung besteht



Figur 1

Blockschema des untersuchten Netzgerätes.

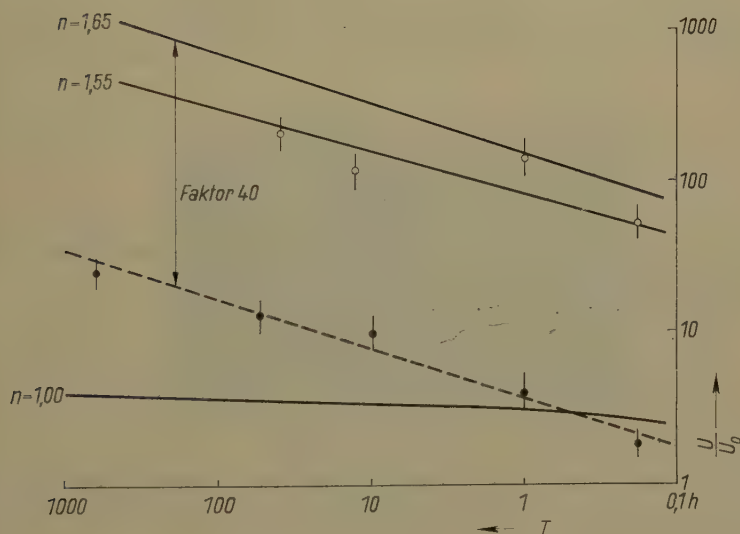
in der Hauptsache darin, dass die Referenzspannung direkt von einer Zener-Diode Z 5 abgenommen wird, die ihrerseits über eine Zener-Dioden-Vorstabilisierung aus einer hinreichend stabilisierten Spannungsquelle gespeisen wird. – Die Ergebnisse sind in Tabelle 2 zusammengefasst.

⁴⁾ E. BALDINGER und W. CZAJA, Z. angew. Math. Phys. 9a, 291 (1958).

Tabelle 2

Rauschen und Drift des stabilisierten Transistornetzgerätes nach Figur 1, sowie des eingebauten symmetrischen Gleichstromverstärkers. Zum Vergleich sind entsprechende Werte für einen Autoakkumulator angegeben

	Netzgerätausgang brutto	Gleichstromverstärker allein, auf dessen Eingang bezogen	Akkumulator 6 V / 80 Ah, unbelastet
Rauschspannung quadratischer Mittelwert über 650 s mit 1 Hz oberer Bandgrenze . . .	5 μV	1,2 μV	< 0,3 μV
Drift über 1 Monat . . .	1,6 $\mu\text{V/h}$	0,6 $\mu\text{V/h}$	150 $\mu\text{V/h}$

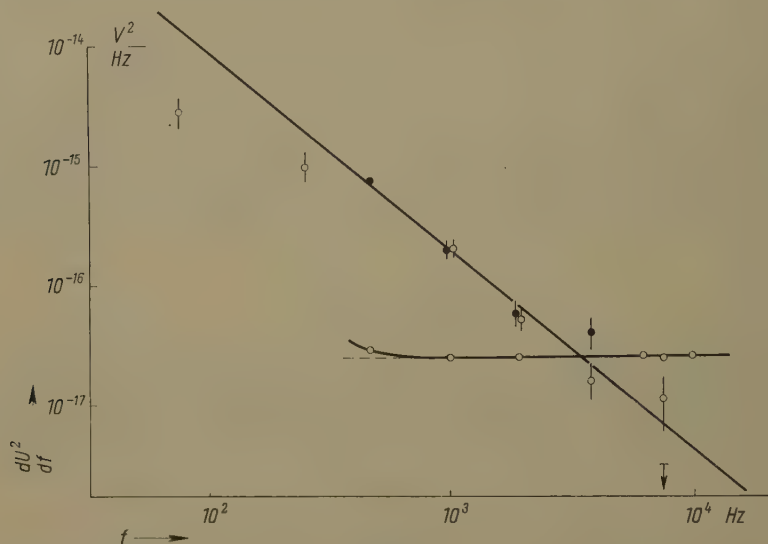


Figur 2

Rauschmessungen bei extrem tiefen Frequenzen: \circ Zener-Diode Z 5 der Referenzspannung; \bullet Transistorpaar OC 76 aus dem symmetrischen Verstärker (Messungen auf dessen Eingang bezogen). U ist die quadratisch gemittelte Rauschspannung, gemessen während der Zeit T mit einer oberen Bandgrenze von 1 Hz. Die Bezugsspannung U_0 berechnet sich aus dem «excess noise» bei 470 Hz (vgl. Figur 3). Die ausgezogenen Linien geben, mit verschiedenem n , den Verlauf von (U/U_0) für ein $(1/f)^n$ -Spektrum, das bei 470 Hz an die Tonfrequenzmessungen anschliesst. Die angegebenen Fehlergrenzen sind mittlere Fehler.

Das Rausch-Spektrum von Halbleiter-Schaltelementen

Die erwähnten Experimente waren so angelegt, dass sie direkt Aussagen über das Rauschen der Zener-Diode Z 5 (Referenzspannung) und der beiden Transistoren OC 76 (Eingangsstufe symmetrischer Verstärker) bei tiefen Frequenzen zulassen (Zener-Strom 5 mA; Emitterströme je 0,6 mA). Diese Aussagen wurden mit Rauschmessungen im Tonfrequenzgebiet verglichen (Figuren 2 und 3).



Figur 3

Rauschspektren im Tonfrequenzgebiet: ○ Zener-Diode Z 5 der Referenzspannung (einschliesslich weisses Rauschen), $U_0 = 0,04 \mu\text{V}$; ● Transistorpaar OC 76 aus dem symmetrischen Verstärker (Messungen auf dessen Eingang bezogen, weisses Rauschen subtrahiert), $U_0 = 0,59 \mu\text{V}$, $n = 1,65$; ○ weiterer Transistor OC 76 (weisses Rauschen subtrahiert), bei 470 Hz auf gleiche Rauschspannung normiert wie ●.

Die Ordinate dU^2/df ist die spektrale Dichte des Quadrates der Rausch-Spannung.

$$U_0 = \left(\sqrt{\frac{dU^2}{df}} f \right)_{f=470 \text{ Hz}}$$

charakterisiert die Grösse des «excess noise» bei 470 Hz. Die angegebenen Fehlergrenzen sind mittlere Fehler.

Zur Auswertung der Messungen bei tiefen Frequenzen ist folgendes zu bemerken. Es wurde jeweils während eines Zeitraumes T die entsprechende Spannung wiederholt in etwa gleichen Zeitabständen gemessen und durch einen geeigneten linearen Gang approximiert. Die Abweichung der Messpunkte von der resultierenden Geraden wurde daraufhin quadratisch gemittelt. Die Wahl dieser Auswertart geschah in der Meinung, dass dabei sowohl ein Drift als auch die im Intervall T vorwiegend linearen Beiträge von Frequenzen $< 1/2 T$ weitgehend verschwinden, so dass man das so ermittelte Rauschen mit einer für vorliegende Zwecke hinreichenden Ge-

nähe dem Integral über das Rauschspektrum von $f_u = 1/2 T$ bis $f_0 = 1$ Hz gleichsetzen darf.

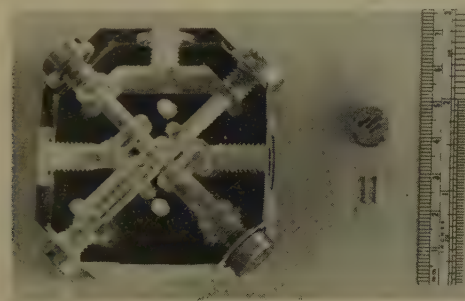
Die Messungen an der Zener-Diode deuten auf die Existenz eines einheitlichen $(1/f)^n$ -Spektrums mit $n = 1,55$. Die Messungen an den Transistoren zeigen nicht dasselbe einheitliche Bild. Sowohl im Tonfrequenzgebiet als auch bei extrem tiefen Frequenzen verläuft das Spektrum wie $(1/f)^n$ mit $n = 1,65$, doch differieren die absoluten Beträge der entsprechenden Rauschquadrate um den Faktor $(40)^2 = 1600$. Der Übergang, der nach diesen Messungen zwischen 0,5 kHz und etwa 1 mHz stattfinden muss, ist in der Messung eines in der Schaltung nicht verwendeten OC 76 bei 250 Hz und 75 Hz angedeutet.

Für die Rauschmessungen im Tonfrequenzgebiet sei Herrn BILGER unser herzlichster Dank ausgesprochen. Der «Kommission zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung» des Bundes danken wir für die Finanzierung der Untersuchungen.

Über die Möglichkeit digitaler hydraulischer Elemente. Von H. GLÄTTLI und H. R. MÜLLER, Zürich⁵⁾.

Elementare Überlegungen zeigen, dass hydraulische Schaltelemente Ansprechzeiten der Grössenordnung Millisekunden gestatten. Hierbei sind ein Druck von etwa 5 atü, ein Hub von 2 mm und eine Länge der beschleunigten Säule von 20 cm angenommen.

Figur 1 zeigt 2 hydraulische Multivibratoren, die sich nur bezüglich Grösse, nicht aber durch ihr Arbeitsprinzip unterscheiden. Die Frequenz des kleinen Multivibrators liegt etwa 4mal höher als die des grösseren.

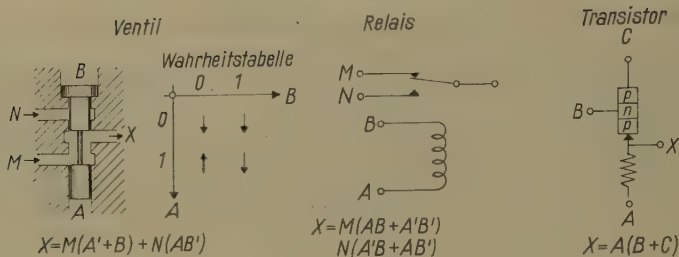


Figur 1

Geometrisch ähnliche hydraulische Multivibratoren.

Die Frequenz eines Multivibrators stellt sich so ein, dass die Verstärkung 1 beträgt. Als Verstärkung bezeichnen wir das Verhältnis zwischen aufzuwendender und steuerbarer Energie in einem bestimmten Zeitintervall. In einem Fall betrachten wir die Energie, die notwendig ist, um ein Ventil innerhalb einer vorgegebenen Zeit (Ansprechzeit) auszusteuern. Im zweiten Fall betrachten wir die Energie, die von einem angesteuerten Ventil in derselben Zeit kontrolliert werden kann.

⁵⁾ IBM-Forschungslaboratorium.



Figur 2

Hydraulisches logisches Element und entsprechende elektrische logische Elemente.

Figur 2 zeigt ein hydraulisches logisches Grundelement und die entsprechenden elektrischen logischen Grundelemente Transistor und Relais. Die Wahrheitstabelle definiert die Stellung des Ventils als Funktion der Drucke A und B .

Durch Fixieren oder Parallelschalten von einzelnen Eingängen können Unterfunktionen mit $(n - 1)$, $(n - 2)$, ... usw. Variablen erzeugt werden. Diese Methode gestattet mit ein und demselben Element mehrere logische Funktionen zu erzeugen.

Die folgende Tabelle zeigt die Anzahl Unterfunktionen verschiedener Elementarschaltungen.

	Transistor	Ventil	Relais
Funktionen mit 4 Variablen	—	1	1
Funktionen mit 3 Variablen	1 (4)	7	7
Funktionen mit 2 Variablen	3 (4)	4	6

Die eingeklammerten Grössen in der Transistorkolonne haben nur Bedeutung, wenn wir wahlweise das eine oder andere Grundelement zulassen (pnp - oder $nnpn$ -Transistor, Kollektor- oder Emitterbasisschaltung). Hingegen kommt ihnen nur wenig Bedeutung zu, wenn wir Mikroprogrammierung vorsehen. Der Transistor ist dem hydraulischen logischen Element und dem Relais bezüglich Schaltzeit einige Grössenordnungen überlegen. Der Anwendungsbereich hydraulischer logischer Elemente dürfte sich deshalb auf Anwendungen mit relativ geringer Steuerungsgeschwindigkeit beschränken.

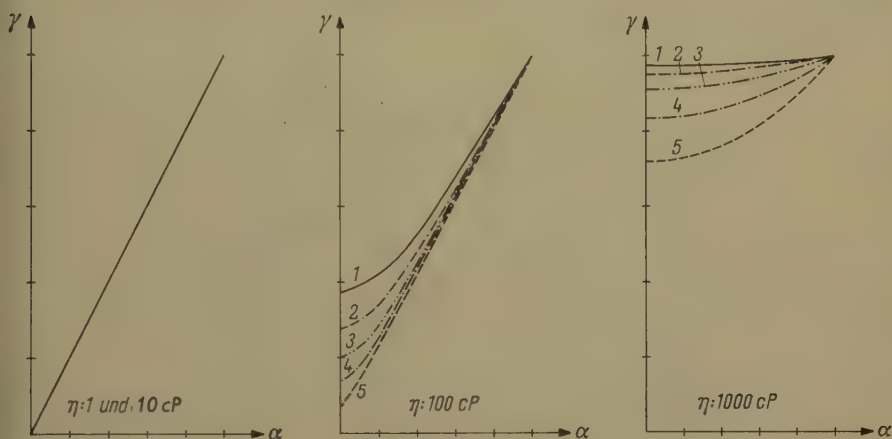
Die Frage der Miniaturisation betrifft vor allem die Schaltzeit, das Volumen und die Antriebsenergie. Die Reduktion des Volumens ist offensichtlich, während Antriebsenergie und Schaltzeit wesentlich von den Voraussetzungen, wie Viskosität und Toleranzen, abhängen. Die Untersuchungen beschränken sich auf die Schaltzeit. Den Berechnungen wurde die Annahme zugrunde gelegt, dass alle 3 Dimensionen um den gleichen Faktor α reduziert werden. Vernachlässigen wir die Reibung, so ist die Zeitreduktion proportional α , wie eine einfache Rechnung zeigt. Führen wir die Reibungen ein, so ist das Problem nur noch numerisch lösbar. Die numerischen Rechnungen wurden auf einer IBM 650 durchgeführt.

Figur 3 zeigt den Zeitreduktionsfaktor γ (Verhältnis zwischen neuer Schaltzeit t und ursprünglicher Schaltzeit t_0) in Abhängigkeit von α .

Der Einfluss der Reibung macht sich erst bei der für Hydraulikanwendung ungewöhnlich hohen Zähigkeit von 100 cP bemerkbar. Bemerkenswert ist dabei noch die Tatsache, dass die Reibungsverluste in der Scherströmung zwischen Kolben und Bohrung die viskosen Verluste der Laminarströmung um mindestens eine Grössenordnung übertreffen.

Zusammenfassend kann folgendes gesagt werden:

Hydraulische logische Elemente gestatten Schaltzeiten der Grössenordnung Millisekunden. Sowohl logisch wie auch bezüglich der Betätigungsenergie besteht grosse Ähnlichkeit mit Relais. Miniaturisation erhöht die Schaltgeschwindigkeit. Die Verwendbarkeit hoch viskoser Flüssigkeiten verringert weitgehend die auftretenden Toleranzprobleme.



Figur 3

Zeitreduktionsfaktor γ als Funktion von α . Druck 1 atü, Parameter: Hub. 1 6,4 mm; 2 3,2 mm; 3 1,6 mm; 4 0,8 mm; 5 0,4 mm.

Détermination des paramètres \bar{h}_{12} et \bar{h}_{22} de transistors. Par R. DESSOULAVY et B. SECRÉTAN, Lausanne⁶⁾.

I. Introduction

1. Symboles et schéma équivalent du transistor à jonction dans le montage émetteur commun (figure 1):

2. Définitions:

$$h_{12} = \frac{\bar{U}_1}{U_2|_{I_1=0}}, \quad h_{22} = \frac{\bar{I}_2}{\bar{U}_2|_{I_1=0}}.$$

En très basse fréquence (~ 100 Hz) ces 2 grandeurs sont réelles et valent approximativement:

$$h_{12} = \frac{R_2}{R_3}, \quad h_{22} = \frac{1}{R_4} + S \frac{R_2}{R_3}.$$

⁶⁾ Ecole Polytechnique de l'Université de Lausanne. Laboratoire d'Electronique.

Nous montrons dans ce qui suit la possibilité de déterminer ces valeurs par des mesures à une fréquence supérieure (~ 1 kHz) grâce à une méthode de neutralisation.

3. Méthodes de mesure. Nous ne donnerons sur les figures 2, 3 et 4 que le circuit équivalent pour l'alternatif. Il va de soi que pour les mesures, des sources de polarisation adéquates doivent être prévues.

a) Mesure directe des courants et tensions alternatives \bar{I}_2 , \bar{U}_1 et \bar{U}_2 selon la figure 2 (pour la mesure $I_2 R_V = \infty$, pour celle de $U_1 R_A = 0$).

Les courbes *a* des figures 5 resp. 6 montrent la dépendance de h_{12} resp. h_{22} en fonction de la fréquence. On constate qu'à 1 kHz, même déjà à 300 Hz, on mesure des valeurs nettement différentes de celles obtenues en très basse fréquence (~ 100 Hz). Ceci s'explique par le couplage capacitif entre B' et C (cf. figure 1) dû à C_3 .

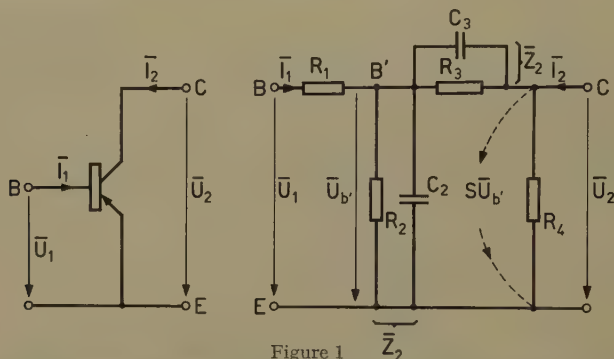


Figure 1

Transistor à jonction: définition des courants et tensions et schéma équivalent pour de faibles signaux.

b) Mesure en pont à 1 kHz selon les figures 3 et 4.

Les courbes *a* des figures 7 resp. 8 représentent la tension de déséquilibre U_D du pont en fonction des résistances d'équilibrage R_b resp. R_c . On constate qu'à la fréquence utilisée de 1 kHz la tension U_D ne s'annule pas mais passe par un minimum d'ailleurs très peu marqué. Ceci provient du fait que \bar{U}_1 et \bar{U}_2 ne sont pas en phase dans la mesure de \bar{h}_{12} et que l'admittance inconnue \bar{h}_{22} est complexe.

II. Neutralisation

1. Principe: La neutralisation consiste à faire circuler dans R_1 et Z_2 un courant de phase opposée à celle du courant dû à C_3 . La méthode classique utilisée ici est de connecter une capacité de neutralisation C_n (C'_n) entre la base et une source de tension $-U_2$ (en pointillé sur les figures 2, 3 et 4).

2. Détermination de \bar{h}_{12} . Hypothèses:

$$a) Z_2 \ll Z_3, \quad b) |R_1 + \bar{Z}_2| \ll \frac{1}{\omega C_n}, \quad c) \omega C_2 R_2 \ll 1.$$

On trouve pour \bar{h}_{12} :

$$\bar{h}_{12} \simeq \frac{R_2}{R_3} [1 + \omega^2 R_2 R_3 C_2 (C_3 - C_n)] + j \omega [R_2 C_3 - C_n (R_1 + R_2) - \frac{C_2 R_2^2}{R_3}].$$

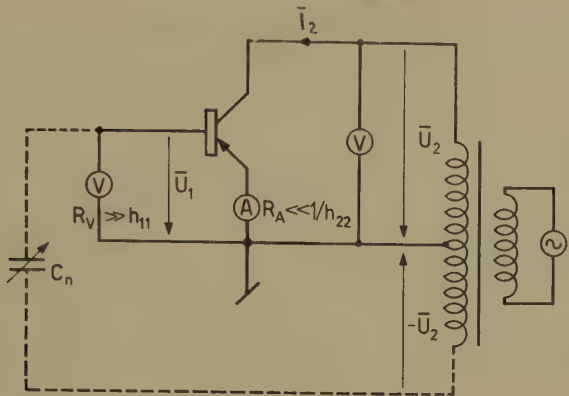


Figure 2
Mesure directe des paramètres h_{12} et h_{22} . En pointillé: neutralisation.

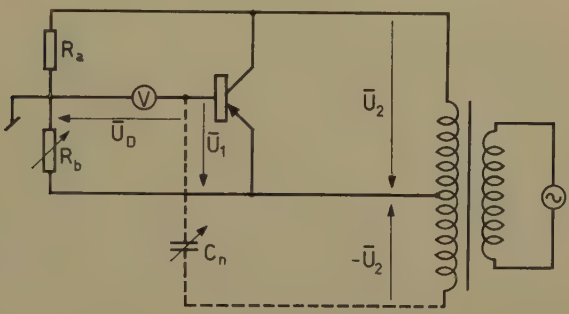


Figure 3
Détermination de h_{12} par une mesure en pont. En pointillé: neutralisation.

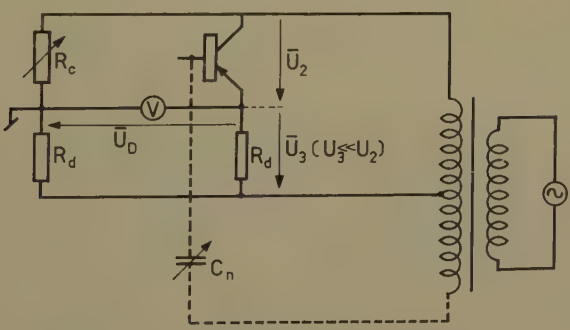


Figure 4
Détermination de h_{22} par une mesure en pont. En pointillé: neutralisation.

La neutralisation aura lieu lorsque

$$\operatorname{Im} \{\bar{h}_{12}\} = 0, \quad C_n = \frac{R_2}{R_1 + R_2} C_3 \left(1 - \frac{C_2 R_2}{C_3 R_3}\right).$$

Pour cette valeur de C_n

$$h_{12} \cong \frac{R_2}{R_3}$$

à condition que

$$\varepsilon = \omega^2 R_2 R_3 C_2 (C_3 - C_n) \ll 1.$$

3. Détermination de \bar{h}_{22} . On a facilement

$$\bar{h}_{22} = \frac{1}{R_4} + S \frac{\bar{U}_b'}{\bar{U}_2}.$$

En admettant les mêmes hypothèses que pour \bar{h}_{12} on trouve:

$$\bar{h}_{22} \cong \frac{1}{R_4} + S \frac{R_2}{R_3} [1 + \omega^2 R_2 R_3 C_2 (C_3 - C_n')] + j \omega S [(C_3 - C_n') R_2 - C_2 \frac{R_2^2}{R_3}].$$

La neutralisation aura lieu lorsque

$$\operatorname{Im} \{\bar{h}_{22}\} = 0,$$

d'où

$$C_n' = C_3 \left(1 - \frac{C_2 R_2}{C_3 R_3}\right),$$

a leur pour laquelle h_{22} vaudra

$$h_{22} \cong \frac{1}{R_4} + S \frac{R_2}{R_3}$$

à condition que

$$\varepsilon' = \omega^2 R_2 R_3 C_2 (C_3 - C_n') \ll 1.$$

III. Résultats expérimentaux

Les mesures ont été effectuées sur des transistors OC 71 au germanium du type courant. Pour $i_c = 1$ mA et $u_{ce} = -5$ V on a obtenu avec un exemplaire plutôt défavorable les résultats suivants:

Sur la base de mesures complémentaires nous avons déterminé pour ce transistor les éléments de la figure 1:

$$\begin{array}{llll} R_1 = 260 \, \Omega, & R_2 = 1,5 \, \text{k}\Omega, & R_3 = 5,8 \, \text{M}\Omega, & R_4 = 200 \, \text{k}\Omega, \\ C_2 = 14 \, \text{nF}, & C_3 = 69 \, \text{pF}, & C_n \cong 56 \, \text{pF}, & C_n' \cong 59 \, \text{pF}, \\ S = 40 \, \text{mA/V}. & & & \end{array}$$

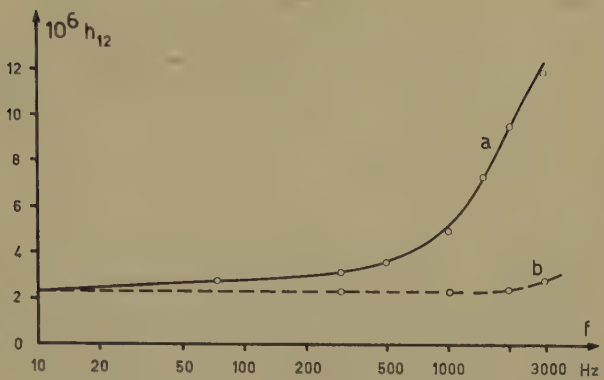


Figure 5
Variation de h_{12} en fonction de la fréquence. Mesure selon schéma de la figure 2. *a* sans neutralisation; *b* avec neutralisation.

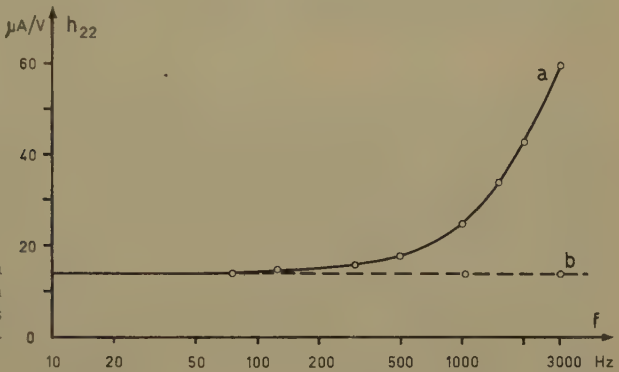


Figure 6
Variation de h_{22} en fonction de la fréquence. Mesure selon schéma de la figure 2. *a* sans neutralisation; *b* avec neutralisation.

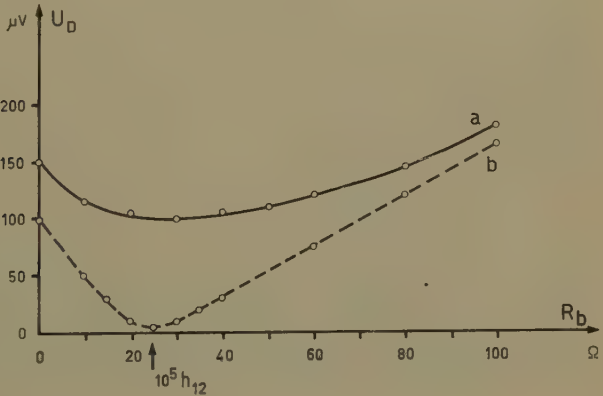


Figure 7
Mesure de h_{12} au pont selon le schéma de la figure 3. Tension U_D en fonction de la résistance d'équilibrage R_b ($R_a = 100 \text{ k}\Omega$; $U_2 = 0,5 \text{ V}$). *a* sans neutralisation; *b* avec neutralisation.

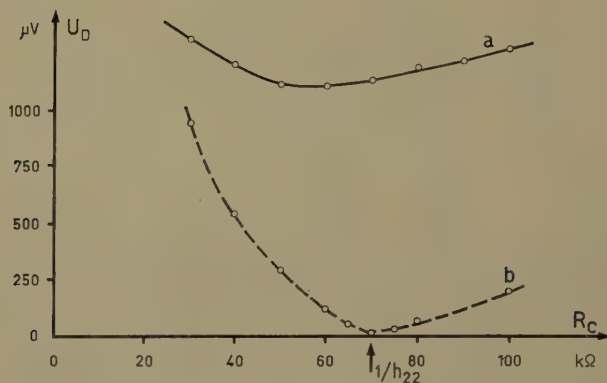


Figure 8

Mesure de h_{22} au pont selon le schéma de la figure 4. Tension U_D en fonction de la résistance d'équilibrage R_c ($R_d = 100 \Omega$; $U_2 = 0,5 \text{ V}$). *a* sans neutralisation; *b* avec neutralisation.

IV. Conclusion

Les mesures confirment le fait que l'on peut mesurer à 1 kHz grâce à la neutralisation les valeurs recherchées de h_{12} et h_{22} pour les très basses fréquences. Les erreurs systématiques ε et ε' restent dans des limites encore acceptables ($\varepsilon = 6\%$ et $\varepsilon' = 5\%$). Enfin cette méthode de neutralisation permet de calculer C_3 à partir de C_n si l'on connaît R_1 , R_2 , R_3 et C_2 .

International Symposium on Active Networks and Feedback Systems

New York, April 19-21, 1960

The Microwave Research Institute of the Polytechnic Institute of Brooklyn announces that the tenth of its annual International Symposia will be held at the Engineering Societies Building, 33 West 39 Street, New York, New York, Tuesday through Thursday, April 19-21, 1960. The papers given will include the following topics:

Physical Realizability of Active Networks,
Representation and Synthesis of Active Networks,
Synthesis of Feedback Networks,
Time Varying Systems,
Applications of Active Network Theory to Electron Devices,
Applications of Active Network Theory to Feedback Systems.

Correspondence should be addressed to: Professor HERBERT J. CARLIN, Microwave Research Institute, 55 Johnson Street, Brooklyn 1, New York.

JEROME FOX

 Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

Festschrift für Alexander M. Ostrowski. 1. und 2. Teil. Archiv der Mathematik 5, Fasc. 1–3 und 4–6 (Verlag Birkhäuser, Basel und Stuttgart 1954). 521 S., 40 Abb.; Fr. 60.–.

Der fünfte Band des Archives der Mathematik erschien – einem schönen Brauch folgend – als Festschrift zu Ehren von Prof. ALEXANDER M. OSTROWSKI, der am 25. September 1953 seinen 60. Geburtstag beging. Eine grosse Zahl von Freunden, Kollegen und Schülern aus der ganzen Welt widmeten dem verdienten Mathematiker und geschätzten Lehrer kleinere oder grössere Abhandlungen aus den verschiedensten Gebieten der Mathematik und demonstrierten damit auch das umfassende Wirken des Jubilars. Die Arbeiten entstammen vorwiegend der reinen Mathematik; doch finden sich darunter auch eine Reihe von Untersuchungen aus der angewandten Mathematik oder solche, die direkt oder indirekt zu ihr Bezug haben und damit speziell auch den Leser der ZAMP interessieren werden. Die beiden Teile dieser ausgezeichneten Festschrift umfassen 70 Arbeiten, so dass es unmöglich ist, hier auf sie einzeln einzugehen.

E. ROTH-DESMEULES

Applied Mathematics and Mechanics (Prikladnaia matematika i mekhanika). Translation Editor: GEORGE HERRMANN (Pergamon Press Inc., New York und London). Erscheint zweimonatlich, jährlich etwa 1200 Seiten. Jahresabonnement \$ 35.

Es ist bekannt, dass die russische wissenschaftliche Literatur – abgesehen von den Referaten – in der westlichen Welt vielfach wenig oder verspätet beachtet wird. Der Grund für diesen Zustand ist wohl in erster Linie in den sprachlichen Schwierigkeiten («language barrier») zu suchen; ausserdem sind manche Zeitschriften nur schwer zugänglich. Dabei ist die Zahl der hier interessierenden russischen Zeitschriften, Nachrichtenblätter und Berichte beachtlich: ein halbes Dutzend für Mathematik, ein Dutzend für Physik, etwa drei Dutzend für Technik (zum Teil sehr stark spezialisiert), wozu noch eine Anzahl von Zeitschriften in einer der Sprachen der Unionsrepubliken kommen. Für den Forscher und Wissenschaftler im Westen stellt es jedenfalls eine erhebliche Erleichterung dar, wenn ihm wenigstens die wichtigsten Zeitschriften in einer Übersetzung zugänglich sind.

Zu den bedeutenden russischen Zeitschriften gehört die «Prikladnaia matematika i mekhanika», die nun seit 1958 vom Pergamon Institute (New York) im Auftrage der American Society of Mechanical Engineers und mit Unterstützung der National Science Foundation übersetzt und herausgegeben wird. Diese Zeitschrift, von der gegenwärtig (1959) der 23. Band erscheint, umfasst das Gebiet der angewandten Mathematik und der Mechanik (fester, flüssiger und gasförmiger Körper), entspricht also etwa der ZAMP. Um einen Einblick in das Arbeitsgebiet und die behandelten Probleme zu geben, seien hier wenigstens die Titel der zum Teil recht bemerkenswerten Arbeiten der vorliegenden ersten Nummer der Übersetzung (Band 22, Nr. 1) vermerkt:

N. N. KOCHINA und N. S. MEL'NIKOVA, *Strong Point-Blasts in a Compressible Medium*. V. A. EGOROV, *On the Solution of a Degenerate Variational Problem and the Optimum Climb of a Cosmic (Space) Rocket*. I. A. KURTSVEIL', *On Generalized Ordinary Differential Equations Possessing Discontinuous Solutions*. V. I. ZUBOV, *On a Method of Investigating the Stability of a Null-Solution in Doubtful Cases*. I. B. CHELPANOV, *Oscillations of a System with a Relay of Advancing Characteristics*. B. A. BERG,

Deformational Anisotropy. I. I. KADASHEVICH and V. V. NOVOZHILOV, *The Theory of Plasticity Which Takes into Account Residual Microstresses.* D. D. IVLEV, *On the General Equations of the Theory of Ideal Plasticity and of Statics of Granular (Pulverulent) Media.* V. D. KLIUSHNIKOV, *On Plasticity Laws for Work-Hardening Materials.* L. A. SHAPOVALOV, *The Influence of Non-Uniform Heating on the Stability of a Compressed Bar.* V. I. MOSSAKOVSKII, *Pressure of a Circular Die (Punch) on an Elastic Half-Space, Whose Modulus of Elasticity Is an Exponential Function of Depth.* V. V. KELDYSH, *Application of Slender Body Theory to the Calculation of Aerodynamic Properties of Low Aspect Ratio Wings with Nacelles at Their Tips.* G. N. KOPYLOV, *Aerodynamic Characteristics of Thin Wedge-Shaped Profiles in Transonic Flows.* S. MANOLOV, *A Special Case of the Existence of Small Periodic Motions of two Penduli, Subjected to Uniform Rotation.* G. K. POZHARITSKII, *On a Property of the First Approximation System.*

Die Durchsicht der Arbeiten der vorliegenden Nummer bestätigt, dass im allgemeinen der russische Wissenschaftler über die westlichen Arbeiten eingehend informiert ist (eine Beziehung, die nicht ohne weiteres umkehrbar ist, aber auch verschiedene Interpretationen zulässt). Das Verhältnis der zitierten russischen und fremdsprachigen Arbeiten ist etwa 9:8. – Die englische Übersetzung der PMM wird jährlich ungefähr 1200 Seiten umfassen, was den etwas mehr als 850 Seiten des russischen Originals entspricht. Ohne Zweifel wird diese Publikation auf ein erhebliches Interesse stossen. Erwähnt sei noch, dass von jeder Arbeit auch Sonderdrucke zum einheitlichen Preis von 2.00 \$ (10 s) erhältlich sind, was sicher sehr zu begrüßen ist in Anbetracht des doch recht hohen Preises eines ganzen Jahrganges.

E. ROTH-DESMEULES

Anwendung von Rechenmaschinen bei der Berechnung von Regelvorgängen (Vorträge gehalten bei einer Tagung des Fachausschusses Regelungsmathematik der GAMM in Düsseldorf, 8. November 1957). Herausgeber: W. ORPELT (Oldenbourg, München 1958). 128 S., 121 Abb.; DM 16.80.

Nachdem sich in den letzten Jahrzehnten die Regeltechnik immer stärker zur Lösung mathematischer Probleme der programmgesteuerten Digitalrechnergeräte und auch der Analogrechner bediente, widmete die GAMM eine Tagung der Behandlung von Fragen, die sich bei der Anwendung moderner Rechenmaschinen in der Regelungsmathematik ergeben. In sieben ausgezeichneten Vorträgen kamen dabei sowohl Probleme aus der digitalen wie auch aus der analogen Technik zur Sprache, welche dann in der Reihe «Beihefte zur Regelungstechnik» des Oldenbourg-Verlages veröffentlicht wurden.

E. BUKOVICS (Wien) gibt einen Überblick über die Einsatzmöglichkeiten digitaler Rechnergeräte zum Lösen von Grundaufgaben der Regelungstechnik. Er zeigt, wie mit relativ kleinen digitalen Maschinen Stabilitäts- und Optimierungsberechnungen von Regelkreisen durchgeführt werden können.

J. B. RESWICK (Cambridge, Mass., USA) erläutert eine einfache graphische Methode, um aus einer gegebenen Autokorrelationsfunktion der Eingangsgrösse eines Regelkreises und der Crosskorrelationsfunktion zwischen Eingang und Ausgang die Übertragungsfunktion des Regelkreises zu finden.

A. LEONHARD (Stuttgart) gibt einige Anwendungen eines elektronischen Gerätes an, welches gestattet, den komplexen Wert von Polynomen zu berechnen. Besonders bei der analytischen Behandlung von Regelaufgaben erweist sich dieses Gerät als gutes Mittel zur Zeitersparnis.

Bis heute sind schon einige Verfahren bekannt, Analogierechenschaltungen optimal zu programmieren. R. HERSCHEL (Ulm) zeigt eine weitere Programmie-

rungsart, die sich insbesondere bei der Behandlung nichtlinearer Probleme sehr gut bewähren soll.

Ein wertvoller Vergleich der Berechnung eines Regelvorganges mit Rechenanlagen verschiedener Typen (Digitalrechner IBM 650, elektronischer Analogierechner, mechanische Integrieranlage) stammt von den Herren O. FÖLLINGER und G. SCHNEIDER (Frankfurt).

E. BÜHLER (Mannheim) verfasste einen Beitrag über die elektronische Nachbildung eines mechanischen Systems mit Reibung. Sorgfältig werden besonders die Reibungsverhältnisse beim Übergang von Haftreibung zu Gleitreibung nachgebildet, wobei allerdings der für diese Nachbildung betriebene elektronische Aufwand fragwürdig gross ist.

Ein letzter Vortrag von H. WITSENHAUSEN (Brüssel) über die Anwendung von Analogierechenmaschinen auf die Optimierung von unstetigen Regelkreisen mit statistisch schwankenden Eingangsgrössen behandelt ein heute sehr aktuelles Thema, da man in jüngster Zeit immer mehr danach trachtet, Regelkreise nicht für Eingangsgrössen, die als Sprungfunktion auftreten, zu optimieren, sondern für statistisch schwankende Eingangsgrössen, da die wirklich vorkommenden Störfunktionen meist auch nur statistisch erfasst werden können.

Einige interessante Diskussionsbeiträge bilden den Abschluss dieses kleinen Werkes, das jedem, der sich mit Regeltechnik und Analogierechentechnik befasst, eine Fülle wertvollster Anregungen bietet.

H. J. BÜRGIN

Integral Equations and Their Applications to Certain Problems in Mechanics, Mathematical Physics and Technology. Von S. G. MIKHLIN. Übersetzt aus dem Russischen von A. H. ARMSTRONG (Pergamon Press, London, New York und Paris 1957). 338 S., 24 Fig.; 80 s.

Diese Übersetzung zeigt erneut das hohe Niveau der russischen Lehrbücher, wo vor allem dem methodischen Aufbau der grösste Wert beigemessen wird. Es geht dem Verfasser darum, das enorme Material, das sich im Verlaufe der vergangenen dreissig Jahre in Fachzeitschriften angehäuft hat und welches sich mit den Anwendungen von Integralgleichungen in Physik und Technik befasst, zu sammeln und in einer derartigen Form zusammenzufassen, dass es getrost als ein Standardwerk auf diesem Gebiet angesehen werden kann.

Der erste Teil des Buches befasst sich mit den fundamentalen Theorien über Integralgleichungen und mit den Methoden der approximativen Lösungsverfahren. Spezielle Beachtung wird den singulären Integralgleichungen gewährt, welche wohl schon gründlich erforscht und bei vielfachen Anwendungen ausgeprüft sind, jedoch noch kaum in einem systematischen Aufbau dargestellt wurden. Wenn immer möglich werden die theoretischen Resultate durch numerische Beispiele erläutert.

Der zweite, grössere Teil ist den Anwendungen der Integralgleichungen gewidmet, wobei hauptsächlich ein- und zweidimensionale Probleme aus den Gebieten der Elastizitätslehre (biharmonische Probleme) und der Hydrodynamik behandelt werden. Ein spezielles Kapitel befasst sich mit den Anwendungen der Theorie der singulären Integralgleichungen.

TH. GINSBURG

Ballistik. Von HERMANN ATHEN, 2. Aufl. (Quelle & Meyer, Heidelberg 1958). 258 S., 59 Fig., 4 Zahlentafeln; DM 29.–.

Das den Ballistikern wohlbekannte Lehrbuch von H. ATHEN erscheint nun in einer zweiten Auflage, die den bedeutenden Entwicklungen während und seit dem Kriege weitgehend Rechnung trägt. Die Hauptteile des Buches sind: Äussere Ballistik, Treffwahrscheinlichkeit, innere Ballistik, Bomben- und Raketenballistik.

Bei der Aussenballistik werden beim Problem des Luftwiderstandes die Grundlagen der Strömungslehre und der Gasdynamik gegenüber der ersten Auflage bedeutend ausführlicher behandelt, während die analytischen Lösungsmethoden der (genähten) ballistischen Hauptgleichungen etwas in den Hintergrund getreten sind, obwohl auch jetzt noch Näherungsmethoden und Näherungsansätze bei verschiedenen Fragestellungen einen ziemlich breiten Raum einnehmen.

Das Kapitel über die Störungstheorie würde man vielleicht gerne noch etwas erweitert sehen durch eine ausführlichere Behandlung der praktisch wichtigen höhenveränderlichen Störungen, insbesondere auch im Falle der Flak-Bahnen, da hier die Verhältnisse häufig wesentlich anders liegen als bei den im Mündungshorizont endenden Flugbahnen. Die Bomben- und Raketenballistik werden dem einführenden Charakter des Buches gemäss nur kurz gestreift. Das Buch bietet eine recht brauchbare Einführung in die Fragestellungen der Ballistik, wobei die theoretischen Entwicklungen im Vordergrund stehen, während die experimentellen und messtechnischen Probleme meist nur knapp angedeutet werden. Über 250 Literaturangaben ermöglichen es aber dem Interessierten, auf ausführlichere Spezialuntersuchungen zurückzugreifen. Das Buch ist ohne Zweifel – wie schon die erste Auflage – gut geeignet, manchem die ersten Grundlagen der theoretischen Ballistik zu vermitteln.

E. ROTH-DESMEULES

Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen. Von R. SAUER (Springer-Verlag, Berlin 1958). 284 S., 68 Abb.; DM 38.–

Dieses in der «gelben Reihe» des Springer-Verlags (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften) herausgekommene Standardwerk erscheint in der zweiten Auflage mit einer Reihe von Ergänzungen, welche zum Teil auf den neuesten Entwicklungen in der Mathematik beruhen. Dies gilt vor allem von dem neu aufgenommenen Kapitel über die Behandlung von Anfangswertproblemen mit Hilfe des *Distributionskalküls* von LAURENT SCHWARTZ, welcher erst in den vergangenen zehn Jahren entwickelt wurde.

Nach einer kurzen Darlegung der Grundbegriffe der Distributionstheorie, wobei unter anderem auch die Pseudofunktionen von H. RIESZ eingeführt werden, wird der Kalkül auf Faltungsgleichungen, und zwar besonders auf Anfangswertprobleme der Wellengleichung angewandt. In einem weiteren Abschnitt wird die Brauchbarkeit des Kalküls an praktischen Beispielen aus der Theorie der dreidimensionalen linearisierten Überschallströmung um flache und schlanke Flugkörper erläutert. Hierbei erscheint die Hadamardsche Theorie der *endlichen Bestandteile von Integralen* als blosser Spezialfall der Distributionstheorie.

Bei der Erweiterung der Laplace-Transformation auf Distributionen bleiben die Rechenregeln der Laplace-Transformation im wesentlichen gültig, jedoch treten gewisse Vereinfachungen ein, und verschiedene einschränkende Voraussetzungen fallen weg. So ist es nach der Erweiterung des Oberraumes durch Distributionen nun durchaus möglich, die Laplace-Transformation auch auf Dirac-Distributionen (Sprungfunktionen) anzuwenden.

Das bereits in erster Auflage bewährte Buch hat durch diese Ergänzungen eine wesentliche Bereicherung erfahren.

TH. GINSBURG

Einführung in die Physik. Band II: *Elektrizitätslehre, Wellenlehre, Akustik und Optik*. Von P. FRAUENFELDER und P. HUBER (Ernst Reinhardt Verlag, München und Basel 1958). 504 S., 697 Fig.; Fr. 29.50.

Der mit Spannung erwartete zweite Band der *Einführung in die Physik* von FRAUENFELDER und HUBER umfasst die Elektrizitätslehre und die Wellenlehre mit

Akustik und Optik. Wiederum überrascht die reiche Fülle des Stoffes und die wohl-dokumentierte und verständliche Darstellung mit den vielen, die Anschaulichkeit und das Verständnis fördernden Beispielen. Der Fachmann wird die Möglichkeit begrüßen, Altbekanntem in neuen Formen zu begegnen, der Lernende aber, für den das Buch in erster Linie gedacht ist, wird die klare, ausführliche und sich doch immer auf das Notwendige beschränkende Darstellung zu schätzen wissen.

Über Einzelheiten der Darbietung des Stoffes mag man in guten Treuen anderer Auffassung sein, in manchen Abschnitten hätte eine sorgfältige Ausfeilung vielleicht noch zu einer besseren Konzentration des Stoffes führen können, und unbefriedigend geblieben ist wie im ersten Band die typographische Gestaltung der Formeln. Man wird es ferner bedauern, dass in einem 1958 erschienenen Buche, in welchem dem Mechanismus der elektrischen Leitung 70 Seiten reserviert sind, die Halbleitereigenschaften überhaupt nicht erwähnt werden, bedauern wird man auch, dass neben dem abstrakten Begriff der Ladungsquelle Angaben über Einzelheiten der Stromerzeugung völlig fehlen und damit auch der immer noch wertvolle Akkumulator nirgends Erwähnung findet.

Durch diese kleinen Einwände soll aber der ausgezeichnete Gesamteindruck des ganzen Buches in keiner Weise eine Einschränkung erfahren. Jeder Abschnitt eröffnet bei eingehendem Studium neue, interessante Gesichtspunkte und zeugt für die manchmal vielleicht etwas eigenwillige, aber immer originelle Darstellungsart der beiden Verfasser. Auf besondere Liebe zur Sache und besondere Sachkenntnis weisen vor allem manche in den letzten Einzelheiten sehr sorgfältig redigierte Kapitel der Optik hin.

Die grosse und überaus verdankenswerte Leistung, die in der Umarbeitung der umfangreichen Stoffgebiete der heutigen Physik in eine für Studierende didaktisch brauchbare Form liegt, kann der Aussenstehende wohl kaum voll ermessen – ein nur äusserliches Zeichen dieser Leistung ist schon die Zahl von beinahe 700 Abbildungen des vorliegenden Bandes. Man wird daher Verständnis dafür aufbringen müssen, wenn der mit grossem Interesse erwartete 3. Band, der die *Atomphysik* enthalten wird, nicht schon im laufenden Jahr herausgegeben werden kann.

W. HARDMEIER

Ordinary Difference-Differential Equations. Von EDMUND PINNEY (University of California Press, Berkeley 1958). 262 S., 45 Fig.; \$5.00.

Eine Differenzen-Differentialgleichung besteht aus einem Ausdruck, welcher sowohl eine Funktion $y_{h_1, h_2, \dots, h_k}(t)$ und einige ihrer Ableitungen bezüglich t als auch Differenzen bezüglich den h 's enthält. Ein Beispiel einer solchen Gleichung ist

$$y'_h(t) = y_{h-1}(t) .$$

Das vorliegende Buch befasst sich mit gewöhnlichen (im Gegensatz zu partiellen) Differenzen-Differentialgleichungen. Nach einem einführenden und den Problemkreis beschreibenden Kapitel entwickelt der Verfasser die zugehörige Theorie, welche anhand von numerischen Beispielen erläutert wird.

TH. GINSBURG

Max-Planck-Festschrift 1958. Herausgegeben von B. KOCKEL, W. MACKE und A. PAPAPETROU. (VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959). 412 S., 28 Abb.; DM 54.-.

Die vorliegende Festschrift ehrt MAX PLANCK zu Anlass seines hundertsten Geburtstags. Sie enthält 31 Beiträge von 33 Autoren. Natürlicherweise überwiegen die Beiträge aus Europa (25) an Zahl die aussereuropäischen.

Die Arbeiten sind nach Inhalt geordnet, wobei neben den Abschnitten über klassische Physik und Relativitätstheorie vor allem die Quantentheorie mit ihren erkenntnis-theoretisch-philosophischen Ausstrahlungen vertreten ist. Die letzteren nehmen einen überraschend breiten Raum ein (etwa 70 Seiten) und machen auf den Rezensenten den ungewohntesten Eindruck. Es ist viel die Rede von der «orthodoxen Schule der Quantenmechanik», und gegen den Positivismus und den grossen ERNST MACH (dessen klassische *Mechanik in ihrer Entwicklung* hoffentlich immer besinnliche Leser finden wird) wird polemisiert. Man kann sich auch des Eindruckes kaum erwehren, dass der Jubilar selbst in einen bekannten weltanschaulichen Karren eingespannt werden soll.

Sehr beachtenswert ist in diesem Zusammenhang der Artikel von V. Fock (Leningrad) *Über die Deutung der Quantenmechanik*. In ihm werden mit grosser Klarheit von einem wohldefinierten philosophischen Standpunkt aus die grundsätzlichen Fragen der Quantentheorie durchleuchtet. Das führt zu einer wesentlichen Erweiterung des ursprünglichen Ideenkreises, allerdings immer innerhalb des zugrunde gelegten philosophischen Rahmens. Dass nicht jeder diesen Rahmen anerkennen kann, fällt in Anbetracht der Offenheit der Auseinandersetzung weniger ins Gewicht.

Natürlich enthält die Festschrift eine grosse Reihe rein wissenschaftlicher Beiträge von zum Teil hoher, zum Teil unterschiedlicher Qualität, auf die der Rezensent nicht weiter eingehen kann.

RES JOST

Einige nichtlineare Probleme aus der Theorie der selbsttätigen Regelung. Von A. I. LURJE. Übersetzt aus dem Russischen von H. KINDLER und R. REISSIG (Akademie-Verlag, Berlin 1957). 167 S., 24 Abb.; DM 15.–.

In diesem Buche sind einige der Arbeiten des Verfassers zusammengefasst, die in den Jahren 1945–1950 in russischen Zeitschriften erschienen sind.

Im ersten Kapitel wird die Problemstellung gegeben und eine Methode entwickelt zur Reduktion der Bewegungsgleichungen eines selbsttätig geregelten Systems auf eine Form, die der Verfasser als *kanonisch* bezeichnet. Im zweiten Kapitel werden die Kriterien für die Stabilität «im Grossen» von nichtlinearen Regelungssystemen des betrachteten Typs aufgestellt; das dritte Kapitel enthält eine Untersuchung der Eigenschwingungen in diesem System, während sich das vierte Kapitel mit dem Verhalten eines Systems an der Grenze seiner linearen Stabilität beschäftigt.

Das Buch wendet sich in erster Linie an den mathematisch gebildeten Ingenieur, der sich mit Berechnung und Bau von selbsttätigen Regelungssystemen befasst, aber auch an Physiker und Mathematiker.

TH. GINSBURG

Theoretical Elasticity. Von CARL E. PEARSON (Harvard University Press, Cambridge, Mass. 1959). 218 S., 19 Fig.; \$6.–.

In der Reihe «Harvard Monographs in Applied Science» ist als dritter Band bereits die ausgezeichnete, wenn auch leider Fragment gebliebene Elastizitäts- und Plastizitätstheorie von H. M. WESTERGAARD erschienen. Die Herausgabe des vorliegenden Buches als sechster Band der gleichen Reihe stellte daher ein gewisses Wagnis dar, das aber in jeder Beziehung geglückt ist.

Annähernd die Hälfte des Werkes befasst sich mit der Entwicklung der Tensorrechnung unter Beschränkung auf kartesische Koordinatensysteme sowie mit der entsprechenden Darstellung der Grundlagen der Kontinuumsmechanik, nämlich des Spannungs- und des Verzerrungszustandes. Dabei beginnt die Entwicklung, wie alle amerikanischen Bücher, mit den Regeln der Vektoralgebra; sie umfasst, zum

Beispiel in den Abschnitten über Differentialgeometrie oder Kreiselung, einiges, was über das unmittelbare Ziel des Buches hinausgeht. In der zweiten Hälfte werden die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie formuliert und alle grundsätzlich wichtigen Verfahren zur Gewinnung von Lösungen besprochen, wobei ein besonderes Kapitel den Variationsprinzipien gewidmet ist. Die drei letzten Kapitel behandeln Thermoelastizität, elastische Wellen und nichtlineare Elastizität.

Die zweite Hälfte dieses Buches demonstriert eindrucklich die Ökonomie der modernen Tensorschreibweise. Es ist hier auf 136 Seiten eine erstaunliche Fülle von Stoff vereinigt. Zwar werden die bei ebenen Problemen heute im Vordergrund stehenden funktionentheoretischen Verfahren nicht dargestellt, und zudem fehlen in diesem zweiten Teil (im Gegensatz zum ersten) alle Anwendungen sowie Übungsaufgaben. Gerade dadurch ist aber auf wenig mehr als 100 Seiten ein äusserst nützliches und übersichtliches Kompendium der räumlichen Elastizitätstheorie entstanden.

H. ZIEGLER

Lehrbuch der Hochfrequenztechnik. Von FRITZ VILBIG, 5. Aufl., Band II (Akademische Verlagsgesellschaft mbH, Frankfurt am Main 1959). 735 S., 950 Abb.; DM 48.–.

Das *Lehrbuch der Hochfrequenztechnik* von VILBIG, das 1937 seine erste Auflage erlebte, kommt nun in fünfter, neubearbeiteter Auflage heraus; diese umfasst drei Bände, von denen der mittlere 1958 erschienen ist. Das Lehrbuch hat sich zu einem eigentlichen Standardwerk entwickelt, das dank seiner Vollständigkeit und Übersichtlichkeit den Dienst eines Handbuches versieht und der Fachwelt unentbehrlich ist. Von der vorbildlichen Qualität zeugt der hier zu besprechende zweite Band der neuesten Auflage. Er umfasst in reicher Fülle: Verstärker (inkl. röhrenlose Verstärker und Laufzeitverstärker), Schwingungserzeugung, Rückkopplung (inkl. Gegenkopplung und Neutralisation), Abschirmung, Gleichrichtung, Modulation und Demodulation, Tastung und Impulsmodulationsverfahren, Frequenzwandlung, Schwundregelung, Dynamikänderung sowie einen Nachtrag (molekulare Mikrowellenverstärker und Oszillatoren). Die Ausstattung ist, wie bei den früheren Auflagen, sehr gut; ausserordentlich zu schätzen sind die zahlreichen Abbildungen.

F. TANK

Handbuch der Physik - Encyclopedia of Physics. Herausgegeben von S. FLÜGGE. Band 12: *Thermodynamik der Gase* (Springer-Verlag, Berlin 1958). 686 S., 253 Fig.; DM 154.–.

Im Rahmen des durch S. FLÜGGE neu herausgegebenen *Handbuches der Physik* ist der Thermodynamik der Gase ein besonderer Band gewidmet. Darin werden die verschiedenen Aspekte dieses Wissensgebietes in umfassender Weise behandelt. Die verschiedenen Hauptkapitel und ihre Verfasser sind die folgenden (die Beiträge sind teils in deutscher, teils in englischer Sprache abgefasst):

The Properties of Real Gases (J. S. ROWLINSON);

Theory of Real Gases (J. E. MAYER);

Principles of the Kinetic Theory of Gases (H. GRAD);

Transporterscheinungen in Gasen von mittlerem Druck (L. WALDMANN);

Allgemeine Vakuumphysik (R. JAECKEL);

Production and Measurement of Ultrahigh Vacuum (D. ALPERT).

Vorweg sei bemerkt, dass es wohl kaum möglich sein wird, einen Referenten zu finden, der zur Beurteilung aller Teile dieses Buches in gleicher Weise zuständig wäre. Hingegen zeigt schon jede Stichprobe, dass dieses Nachschlagewerk ein ausserordentlich hohes wissenschaftliches Niveau hält.

Der Beitrag von ROWLINSON über die Eigenschaften der realen Gase hält sich im Rahmen der klassischen phänomenologischen Thermodynamik und beleuchtet sowohl die theoretischen Formulierungen (Zustandsgleichungen usw.) als auch die experimentellen Methoden und empirischen Ergebnisse. Eine besonders sorgfältige Behandlung erfährt das Gebiet des kritischen Punktes, auch für den Fall der Gas-mischungen.

Der von MAYER verfasste Teil bringt die theoretischen Grundlagen von hoher wissenschaftlicher Warte aus zur Darstellung, wobei selbstredend vom statistischen (auch quantenstatistischen) Standpunkt ausgegangen wird. Im vierten Hauptabschnitt dieses Teiles wird auf das Quantengas eingegangen.

Die kinetische Theorie selbst, die bekanntlich vor allem mit dem Namen BOLTZMANNs verknüpft ist, erfährt eine ausführliche und tief in die begrifflichen Grundlagen eindringende Behandlung durch GRAD.

Der Artikel von WALDMANN über die Transporterscheinungen in Gasen (Zähigkeit, Wärmeleitfähigkeit, Diffusion, Thermodiffusion) nimmt entsprechend der hohen praktischen Bedeutung dieses Gebietes etwa einen Drittel des ganzen Buches ein. Die phänomenologische Betrachtungsweise wird zum Ausgangspunkt genommen, doch wird später die tiefere Begründung aus der kinetischen Theorie gewonnen. Experimentelle Methoden und Ergebnisse erfahren eine ausführliche Würdigung.

Die letzten zwei Hauptteile des Buches schliesslich befassen sich mit der Vakuumphysik. Sie unterscheiden sich von den vorhergehenden namentlich dadurch sehr deutlich, dass hier der Schwerpunkt auf der Behandlung der technischen Vorrichtungen (Pumpen, Messgeräte) liegt.

Jeder der Verfasser hat das von ihm bearbeitete Gebiet als ein geschlossenes Ganzes behandelt. Dabei werden natürlich gewisse Überschneidungen unvermeidbar, was aber nicht als ein Nachteil des Buches gewertet werden darf. Auch der durchaus individuelle Charakter der einzelnen Beiträge ist als Positivum zu betrachten. Alles in allem entspricht das Buch den hohen Erwartungen, mit denen man es von vornherein zur Hand nimmt. Es wird ein hervorragendes Nachschlagewerk sein für einen weiten Kreis von Forschern. Zu diesen gehören vor allem Physiker und Physikochemiker, im Zuge der heutigen Entwicklung aber bereits auch Ingenieure, was in Zukunft noch in höherem Masse der Fall sein wird. W. TRAUPEL

Modern Computing Methods. Notes on Applied Science No.16. Herausgegeben vom National Physical Laboratory (Her Majesty's Stationery Office, London 1957). 129 S., 18 Fig.; 10 s. 6 d.

Die unbekannten Verfasser beschreiben in konzentrierter Form numerische Methoden für Probleme aus verschiedenen Gebieten der angewandten Mathematik. Beispielsweise wird für lineare Gleichungssysteme der Gaußsche Algorithmus vorgeschlagen, und es wird (in Kapitel 2) auch gezeigt, wie man die Elimination mit einem Rechenautomaten zweckmässig durchführt. Entsprechend werden Methoden zur Lösung algebraischer Gleichungen und Eigenwertprobleme angegeben (Kapitel 3 und 4). Weitere Abschnitte sind der Differenzenrechnung und der numerischen Integration von gewöhnlichen sowie partiellen Differentialgleichungen gewidmet. Am Schluss findet der Leser noch interessante Ausführungen über die Berechnung und Tabellierung von Funktionen mit Rechenautomaten. Wenn auch neuere Methoden wie konjugierte Gradienten, Bi-Iteration usw. fehlen, gibt das kleine Werk doch wertvolle Hinweise für den Mathematiker, der mit Rechenautomaten zu tun hat.

H. RUTISHAUSER

NEUERSCHEINUNG

BEITRÄGE ZUR ENTWICKLUNG DER PHYSIK

Festgabe zum 70. Geburtstag von Professor Paul Scherrer
3. Februar 1960

*Herausgegeben von H. Frauenfelder, Urbana; O. Huber, Fribourg und
P. Stähelin, Zürich*

254 Seiten, 43 Abbildungen. Preis ca. Fr./DM 18.—.

Helvetica Physica Acta, Supplementum V

Inhalt: K. ALDER: Kernanregung mit geladenen Teilchen. E. BALDINGER: Elektronik und Kernphysik. A. S. BISHOP: Controlled Fusion – A Review of the Sherwood Program. E. BLEULER und R. M. STEFFEN: Kernspektroskopie. K. BLEULER: Zur Struktur der leichten Atomkerne. F. BOEHM: Der Betazerfall. E. BRETSCHER: Physics and Nuclear Energy. P. DEBYE: Paul Scherrer und die Streuung von Röntgenstrahlen. A. DE-SHALIT: Nuclear Systematics. H. GRÄNICHEN und F. JONA: Physik des Eises. H. L. VON GUGELBERG: Gasentladungen. P. C. GUGELOT: Beschleuniger. E. HEER: Richtungskorrelation sukzessiver Kernstrahlungen. G. HERZOG: My Case of Scherrer's Dynamic Influence. P. HUBER: Neutronenphysik. W. KÄNZIG: Die Struktur der Farbzentren in Alkalihalogeniden. H. LABHART: Physik in der Chemie. B. T. MATTHIAS und W. J. MERZ: Seignette-Elektrizität. J. ROUSSEL: Effets de liaisons moléculaires et cristallines dans la diffusion des neutrons. H. H. STAUB: Streuung von Röntgenstrahlen. R. STÖSSEL: Als Vorlesungsassistent bei Scherrer. R. STÖSSEL: Paramagnetismus. C. G. SUITS: Thoughts About Professor Paul Scherrer. V. L. TELEGDI und R. WINSTON: A Dynamical Interpretation of the Thomas Precession. M. VERDE: Phase Shifts and Model Potentials. H. WÄFFLER: Kernphoto-
prozesse. W. ZÜNTI: Kernspaltung und Reaktoren. F. ZWICKY: Die Erfassung des Weltraumes.

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung
Obtainable through your bookseller – Commandes à votre libraire

BIRKHÄUSER VERLAG · BASEL UND STUTTGART

Clichés Schwitter AG

Basel
Allschwilerstrasse 90
Telefon 061 38 88 50

Zürich
Stauffacherstrasse 45
Telefon 051 25 67 35

Bureau Lausanne
Avenue de la Gare 44
Telefon 021 22 86 75

